Elementarmathematik

Übungsblatt 2

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya 27.04.2017
Übungen: M. Nickel

Übung 1 (2+2 Punkte)
Gegeben sei eine konvergente Folge von reellen Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert α. Zeigen Sie, dass jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen α konvergiert. Geben Sie außerdem ein Beispiel für eine Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ an, die nicht konvergent ist, jedoch unendlich viele konvergente Teilfolgen enthält, deren Grenzwerte alle verschieden sind.

Übung 2 (1+2 Punkte)

1. Finden Sie jeweils eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den folgenden Eigenschaften:
   (a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton, aber nicht konvergent;
   (b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, aber nicht konvergent;
   (c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent, aber nicht monoton;
   (d) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt keine konvergente Teilfolge.
2. Zeigen Sie: eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt entweder keine einzige konvergente Teilfolge, oder unendlich viele.

Übung 3 (3+3+3 Punkte)
Die Fibonacci-Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist definiert durch:

$$F_0 = 0, F_1 = 1 \text{ und } F_{n+1} = F_{n-1} + F_n \text{ für alle } n \geq 1.$$

1. Bestimmen Sie die ersten 10 Glieder und Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$F_{2n+1}^2 - F_{2n}F_{2n+2} = 1.$$
2. Setzen Sie nun $a_n := F_{2n+2}/F_{2n+1}$ und $b_n := F_{2n+1}/F_{2n}$ und zeigen Sie: $[a_n, b_n]$ ist eine Intervallschachtelung.
3. Zeigen Sie: Es gilt $b_n^2 - b_n - 1 = \frac{1}{F_{2n}^2}$ und bestimmen Sie
$$\varphi := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n].$$
   Ist $\varphi \in \mathbb{Q}$?

Dieses Blatt kann bis spätestens **14:00 Uhr** am **Donnerstag, den 04.05.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Schnellhefter, zusammen zu halten.