Elementarmathematik

Übungsblatt 1

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya — 20.04.2016
Übungen: M. Nickel

Übung 1 (2+1 Punkte)

1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Zeigen Sie, dass dann auch $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.
2. Finden Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine Nullfolge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so, dass $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist.

Übung 2 (4 Punkte)
Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, d.h. $p \neq 1$ und teilt p ein Produkt ab, so teilt p auch (mindestens) einen der Faktoren a oder b. Zeigen Sie, dass es kein $x \in \mathbb{Q}$ gibt, sodass $x^2 = p$.

Übung 3 (3+3+3 Punkte)
Sei $a \in \mathbb{Q}$, $a \geq 1$, fest gewählt. Wir definieren rekursiv eine Folge durch

$$\begin{aligned} x_1 &:= a\,, \\ x_{n+1} &:= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)\,. \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie, dass $x_n \geq x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
2. Zeigen Sie, dass dann für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $[\frac{a}{x_n}, x_n] \supseteq [\frac{a}{x_{n+1}}, x_{n+1}]$, und dass die Länge der Intervalle, nämlich $x_n - a/x_n$, eine Nullfolge ist. Dies nennt man eine Intervallschachtelung. In der Vorlesung wird gezeigt, dass dann $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Grenzwert in $\mathbb{R}$ konvergiert.
3. Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} x_n$ in Abhängigkeit von a. Ist der Grenzwert rational für $a = 7$? Was ist mit $a = 25$?

Dieses Blatt kann bis spätestens **14:00 Uhr** am **Donnerstag, den 27.04.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Schnellhefter, zusammen zu halten.