Lineare Algebra

Übungsblatt 9

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya 09.01.2017

Übungen: M. Nickel

Übung 1 (0+2+2 Punkte)

1. Finden Sie alle Paare der folgenden Matrizen, die miteinander multipliziert werden können. Berechnen Sie dann jeweils das Produkt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 9 & 13 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & .1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Für eine $n \times n$-Matrix $M = (m_{ij})$ mit Einträgen in einem Körper K setzen wir $\mathrm{Spur}(M) := \sum_{i=1}^n m_{ii}$. Seien A, B zwei $n \times n$-Matrizen mit Einträgen in K. Zeigen Sie

$$\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA).$$

3. Seien wieder A, B zwei $n \times n$-Matrizen mit Einträgen in K und sei $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Spur}(ABA^{-1}) = \mathrm{Spur}(B)$.

Übung 2 (0 + 4 Punkte)

1. Gegeben seien die folgenden Basen von $\mathbb{R}^3$:

$$B_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, B_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$
$$B_3 := \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M_{B_i}^{B_j}(id)$ für alle i, j.

Sei außerdem $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung mit Darstellungsmatrix

$$M_{B_1}^{B_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie wieder $M_{B_i}^{B_j}(f)$ für alle i, j.

2. Seien

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 10 & -3 \\ -3 & -7 & 3 \\ -4 & -8 & 5 \end{pmatrix}, v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Berechnen Sie Av_1, Av_2, Av_3 und stellen Sie diese als Linearkombination von v_1, v_2, v_3 dar.

   (b) Zeigen Sie, dass $B := (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

   (c) Sei nun $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto Ax$ die Linksmultiplikation mit A. Bestimmen Sie $M_B^B(L_A)$ und finden Sie die allgemeine Formel für $M_B^B(L_{A^n})$ in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$.
   Dabei bedeutet $A^n := \underbrace{A \cdots A}_{n\text{-mal}}$.

Übung 3 (2 + 2 Punkte)
Sei $A \in M_n(K)$ eine quadratische Matrix. Zeigen Sie:

1. Wenn es ein $B \in M_n(K)$ mit $AB = \mathbf{1}$ gibt, dann ist $A \in \mathrm{GL}_n(K)$.

2. Wenn es ein $C \in M_n(K)$ mit $CA = \mathbf{1}$ gibt, dann ist $A \in \mathrm{GL}_n(K)$.

Übung 4 (4 Punkte)
Sei K ein Körper und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$. Finden Sie ein Kriterium in Abhängigkeit von a, b, c, d dafür, dass A invertierbar ist und finden Sie eine Formel für A^{-1}.
Anleitung: machen Sie einen Ansatz $B = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$ und lösen Sie die Gleichungen in den Variablen X, Y, Z, W, die der Gleichung

$$AB = \mathbf{1}_2$$

entsprechen. Das Kriterium tritt dann als Bedingung für die Lösbarkeit auf. Zeigen Sie, dass für diese Lösungen auch $BA = \mathbf{1}_2$ gilt.

Dieses Blatt kann bis spätestens **14:00 Uhr** am **Montag, den 15.01.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutor*innen im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben.