Lineare Algebra

Übungsblatt 7

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya 05.12.2017
Übungen: M. Nickel

Übung 1 (1+3 Punkte)
Benutzen Sie die Dimensionsformel, um die folgenden Aussagen zu beweisen.

1. Seien U_1, U_2 Unterräume des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^3$ mit $\dim U_1 = \dim U_2 = 2$. Zeigen Sie: Ist $U_1 \neq U_2$, so gilt $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$.

2. Sei V ein K-Vektorraum und seien U_1, U_2, U_3 endlichdimensionale Unterräume. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned}\dim(U_1 + U_2 + U_3) + \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_2 \cap U_3) + \dim(U_3 \cap U_1)\\ \leq \dim U_1 + \dim U_2 + \dim U_3 + \dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3)\end{aligned}$$

   Tipp: zeigen Sie zunächst $(U_1 + U_2) \cap U_3 \supseteq (U_1 \cap U_3) + (U_2 \cap U_3)$ und benutzen Sie die Übung 2.

Übung 2 (4 Punkte)
Sei V ein K-Vektorraum und seien U_i, $i = 1 \ldots n$ endlichdimensionale Unterräume. Zeigen Sie:

$$\dim(U_1 + \cdots + U_n) + \sum_{k=1}^{n-1} \dim((U_1 + \cdots + U_k) \cap U_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} \dim U_k \, .$$

Übung 3 (0+4 Punkte)

1. Welche der folgenden Abbildungen sind $\mathbb{R}$-linear? Begründen Sie ihre Antwort.
   - Seien $a, b \in \mathbb{R}$ gewählt, $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax + b$.
   - $f_2 : \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, f \mapsto f(127)$.
   - $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - |x_2| \\ |x_2| \end{pmatrix}$.
   - $f_4 : \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2, f \mapsto \begin{pmatrix} f(2) \\ f(1) - f(2) \end{pmatrix}$.
   - $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto 0$.

2. Gibt es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit folgenden Eigenschaften? Falls ja, geben Sie sie an.

$$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } f(\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Übung 4 (2+2 Punkte)
Seien V, W zwei K-Vektorräume und $f : V \to W$ eine K-lineare Abbildung. Zeigen Sie:

1. Für $M \subseteq V$ gilt: $\langle f(M) \rangle_K = f(\langle M \rangle_K)$.
2. Für $N \subseteq W$ gilt: $\langle f^{-1}(N) \rangle_K \subseteq f^{-1}(\langle N \rangle_K)$, und die Gleichheit gilt im Allgemeinen nicht.

Übung 5 (Zusatzaufgabe)
Zeigen Sie die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischen Mittelwert: Seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \cdots \cdot x_n}$$

und die Gleichheit gilt genau dann, wenn $x_1 = \cdots = x_n$.

1. Zeigen Sie zunächst den Fall $n = 2$.
2. Zeigen Sie den Fall $n = 3$, indem Sie den Fall $n = 2$ benutzen.
3. Zeigen Sie den allgemeinen Fall mithilfe vollständiger Induktion.

Dieses Blatt kann bis spätestens **14:00 Uhr** am **Montag, den 18.12.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutor*innen im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben.