Lineare Algebra

Übungsblatt 4

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya — 12.11.2017

Übungen: M. Nickel

Übung 1 (0+4 Punkte)
Berechnen Sie:

1. $(2+3i)^3$, $\frac{2-3i}{1+i}$, $\frac{2+2i}{3+i} - \frac{1-i}{2-i}$,
2. $(1+i)^{100}$.

Übung 2 (0+0+4 Punkte)

1. Finden Sie alle Lösungen in $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 5 \\ x - y &= 7, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 1 \\ -6x + 4y &= -2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 1 \\ -6x + 4y &= 3\ . \end{aligned}$$

2. Wie viele Lösungen hat die folgenden Gleichung in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$?

$$\begin{aligned} ax + y &= 1 \\ -3x + (a-4)y &= b. \end{aligned}$$

3. Wie viele Lösungen gibt es in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$?

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay - z &= b \\ -x - y + 2z &= 2. \end{aligned}$$

Übung 3 (2+2 Punkte)

1. Sei $a + bi \in \mathbb{C}$ beliebig. Zeigen Sie, dass eine komplexe Zahl $x + iy \in \mathbb{C}$ existiert mit $(x+iy)^2 = a + bi$.
2. Betrachten Sie die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie, dass die Gleichung immer entweder eine oder zwei komplexe Lösungen hat. Wann gibt es eine und wann gibt es zwei?

Übung 4 (0+0+1+1+1+1 Punkte) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathrm{Abb}(X, K)$ sind Unterverktorräume?

1. $X = K = \mathbb{R}$, $\{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ ist eine Polynomfunktion}\}$,
2. $X = \mathbb{N}, K = \mathbb{Q}$, $\{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{Q}) \mid f(2n) = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$,
3. $\{f \in \mathrm{Abb}(X, K) \mid f(x) \neq 0 \text{ für höchstens endlich viele } x \in X\}$,
4. $\{f \in \mathrm{Abb}(X, K) \mid f(x) = 0 \text{ für höchstens endlich viele } x \in X\}$,
5. $X = K = \mathbb{R}$, $\{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) \in \mathbb{Q} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$,
6. $X = K = \mathbb{R}$, $\{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) \leq f(y) \text{ für alle } x < y\}$.

Übung 5 (Zusatzaufgabe) Sei d eine positive ganze Zahl. Zeigen Sie, dass $\sqrt[3]{d}$ entweder eine positive ganze Zahl ist oder irrational.

Dieses Blatt kann bis spätestens **14:00 Uhr** am **Freitag, den 24.11.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben.