

Lineare Algebra  
Übungsblatt 3

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya  
Übungen: M. Nickel

---

03.11.2017

**Übung 1** (0+0+2+2 Punkte)

Zeigen Sie:

1.  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ,
2.  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ,
3.  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ,
4.  $n! > 2^n$  für  $n \geq 4$ .

**Übung 2** (0+0+4 Punkte)

Zeigen Sie:

1.  $n^2 - 2n - 1 > 0$  für  $n \geq 3$ .
2.  $\frac{1}{1+n} + \frac{1}{1+(n+1)} + \dots + \frac{1}{1+(2n-1)} + \frac{1}{1+(2n)} > \frac{13}{24}$ .
3.  $\frac{1}{1+n} + \frac{1}{1+(n+1)} + \dots + \frac{1}{1+(3n-1)} + \frac{1}{1+(3n)} > 1$ .

**Übung 3** (0+0+4 Punkte)

1. Betrachten Sie die drei Geraden in der Ebene, die durch die Seiten eines Dreiecks gegeben sind. Kann man die Teile der zerschnittenen Ebene so schwarz und weiß färben, dass Teile der Ebene, die entlang einer Geraden aufeinandertreffen, verschiedene Farben haben.
2. Gegeben seien  $n$  sich paarweise schneidende Geraden in der Ebene. In wieviele Teile wird die Ebene zerteilt?
3. Gegeben seien wieder  $n$  sich paarweise schneidende Geraden in der Ebene. Zeigen Sie, dass man die zerschnittene Ebene so färben kann, dass sich die Teile, die entlang einer Geraden aufeinandertreffen verschiedene Farben haben.

**Übung 4** (2+0+2 Punkte)

1. Es sei  $G$  eine Gruppe,  $g \in G$  mit  $\text{ord}(g) = d$  und sei  $m \in \mathbb{Z}$  eine ganze Zahl. Bestimmen Sie die Ordnung von  $g^m$ .
2. Es sei  $G$  eine Gruppe, in welcher jedes Element, das nicht das neutrale Element ist, Ordnung zwei hat. Was ist das Inverse von einem Element  $g \in G$ ?
3. Es sei  $G$  eine Gruppe, in welcher jedes Element, das nicht das neutrale Element ist, Ordnung zwei hat. Zeigen Sie: für alle  $g, h \in G$  gilt  $gh = hg$ .

**Übung 5** (Zusatzaufgabe) Sei  $d$  eine positive ganze Zahl. Zeigen Sie, dass  $\sqrt{d}$  entweder eine positive ganze Zahl ist oder irrational.

Dieses Blatt kann bis spätestens **14:00 Uhr** am **Freitag, den 17.11.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben.