Lineare Algebra

Übungsblatt 2

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya 28.10.2017
Übungen: M. Nickel

Übung 1 (4 Punkte - Universelle Eigenschaft des Produkts)
Seien X_1, X_2 Mengen und bezeichne $\mathrm{pr}_i : X_1 \times X_2 \to X_i$ die Projektion auf den i-ten Faktor, $i = 1, 2$. Zeigen Sie:

1. Zu jeder Menge T und zwei Abbildungen $f_i : T \to X_i$ von Mengen, $i = 1, 2$, gibt es *genau eine* Abbildung von Mengen
$$F : T \to X_1 \times X_2$$
mit $f_i = \mathrm{pr}_i \circ F$ für $i = 1, 2$.
Diese Abbildung bezeichnen wir mit (f_1, f_2).

2. Zu jeder Menge T ist
$$\begin{aligned} \mathrm{Abb}(T, X_1 \times X_2) &\to \mathrm{Abb}(T, X_1) \times \mathrm{Abb}(T, X_2) \\ F &\mapsto (\mathrm{pr}_1 \circ F, \mathrm{pr}_2 \circ F) \end{aligned}$$
eine Bijektion von Mengen. Schreiben Sie die inverse Abbildung hin und rechnen Sie nach, dass es sich tatsächlich um das Inverse handelt.

3. Sei P eine Menge mit Abbildungen $\pi_i : P \to X_i$ für $i = 1, 2$, so dass die Abbildung
$$\begin{aligned} \mathrm{Abb}(T, P) &\to \mathrm{Abb}(T, X_1) \times \mathrm{Abb}(T, X_2) \\ F &\mapsto (\pi_1 \circ F, \pi_2 \circ F) \end{aligned}$$
für alle Mengen T eine Bijektion ist, dann gibt es eine Bijektion
$$\Phi : P \xrightarrow{\sim} X_1 \times X_2 \,,$$
welche durch die Eigenschaft
$$\mathrm{pr}_i \circ \Phi = \pi_i$$
für $i = 1, 2$ eindeutig bestimmt ist.

Übung 2 (0+0+0+4 Punkte)

1. Zwei Mengen (nicht notwendigerweise endlich!) heißen gleichmächtig, wenn es eine Bijektion $X \xrightarrow{\sim} Y$ zwischen ihnen gibt. Sind die Mengen X und Y gleichmächtig, dann schreiben wir $|X| = |Y|$. Zeigen Sie für drei Mengen X,Y und Z:

   - $|X| = |X|$,
   - $|X| = |Y| \Leftrightarrow |Y| = |X|$,

- $|X| = |Y|$ und $|Y| = |Z| \Rightarrow |X| = |Z|$.

2. Seien X und Y Mengen mit endlich vielen Elementen, und sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie: wenn $|X| = |Y|$, dann sind äquivalent:

   - f ist bijektiv.
   - f ist injektiv.
   - f ist surjektiv.

Übung 3 (0+0+4 Punkte)

1. Gegeben seien die folgenden Elemente von S_8: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 4 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}, \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

   Berechnen Sie $\sigma\tau, \tau\sigma, \tau\psi, \psi\tau, \sigma\psi, \psi\sigma$.

2. Schreiben Sie die folgenden Permutationen aus S_5 als Produkt von disjunkten Zykeln.

   $$\sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Beweise, dass jede Permutation in S_n eindeutig (bis auf Reihenfolge) als Produkt von disjunkten Zykeln geschreiben werden kann.

Übung 4 (0+0+4 Punkte)

1. Nehmen Sie 3 Permutationen aus S_9, und berechnen Sie deren Ordnungen.

2. Es sei G eine Gruppe mit endlich vielen Elementen, g, h Elemente von G mit $gh = hg$. Zeigen Sie, dass $o(gh) \mid \mathrm{kgV}(o(g), o(h))$.

3. Sei $\sigma \in S_n$. Seien $l_1, \ldots, l_r$ die Längen der Zykel, die in der Zerlegung von σ als Produkt von disjunkten Zykeln auftauchen (siehe Übung 3.3). Zeigen Sie: $o(\sigma) = \mathrm{kgV}(l_1, \ldots, l_r)$.

Übung 5 (Zusatzaufgabe - Schubfachprinzip)

1. Seien n, k positive ganze Zahlen. Wir legen nun $nk + 1$ Objekte in k Schachteln. Zeigen Sie, dass es eine Box gibt, die mindestens $n + 1$ Objekte enthält.

2. Gegeben seien 9 Punkte im Einheitsquadrat. Zeigen Sie, dass es drei Punkte unter diesen gibt, die ein Dreieck mit Flächeninhalt kleiner oder gleich 1/8 aufspannen.

3. Zeigen Sie: auf einer Party mit $n \geq 2$ Gästen gibt es mindestens zwei Gäste, die dieselbe Anzahl von Bekannten (auf der Party) haben. Dabei nehmen wir an, dass Bekanntschaften immer gegenseitig sind.

Dieses Blatt kann bis spätestens **14:00 Uhr** am **Freitag, den 03.11.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben.