Lineare Algebra

Übungsblatt 12

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya — 29.01.2017

Übungen: M. Nickel

Übung 1 (1 + 3 Punkte)
Berechnen Sie die Eigenwerte und dazugehörigen Eigenvektoren der folgenden Matrizen.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ -7/2 & 2 & 7/2 \\ -9/4 & 1/2 & 13/4 \end{pmatrix}$

Übung 2 (4 Punkte)
Sei V ein K-Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus mit der Eigenschaft, dass $f^2 = \mathrm{id}_V$. Zeigen Sie:

1. f kann höchstens 1 und -1 als Eigenwerte haben.
   Gibt es einen solchen Endomorphismus, der nur 1 bzw. -1 als Eigenwert hat?

2. Ist $1 \neq -1$ in K, so gilt: $V = V_1 \oplus V_{-1}$.

Übung 3 (1 + 3 Punkte)

1. Seien $a_1, \ldots, a_n \in K$. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix
$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & -a_n \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_2 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_2 \end{pmatrix} \in M_n(K)\,.$$

2. Bestimmen Sie die Eigenwerte von
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
als Matrix über $\mathbb{Q}$ bzw. über $\mathbb{C}$.

Übung 4 (1 + 1 + 2 Punkte)

1. Sei $A \in M_n(K)$. Zeigen Sie: $A \in \mathrm{GL}_n(K) \Leftrightarrow 0$ ist kein Eigenwert von A.
2. Sei $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ und $\lambda \in K$ ein Eigenwert. Dann ist λ^{-1} ein Eigenwert von A^{-1}.
3. Sei $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Drücken Sie das charakteristische Polynom von A^{-1} durch das charakteristische Polynom von A aus.

Dieses Blatt kann bis spätestens **14:00 Uhr** am **Montag, den 05.02.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutor*innen im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben.