Lineare Algebra

Übungsblatt 11

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya — 21.01.2017

Übungen: M. Nickel

Übung 1 (1 + 3 Punkte)

1. Sei V ein K-Vektorraum mit Unterraum U. Sei W ein Komplement von U, das heißt $W \cap U = \{0\}$ und $W + U = V$. Zeigen Sie, dass die Quotientenabbildung $q_U : V \to V/U$ auf W einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} q_{U|W} : W &\xrightarrow{\sim} V/U \\ x &\mapsto q_U(x) = [x] \end{aligned}$$

definiert.

2. Sei V ein K-Vektorraum mit Unterraum U. Der Dualraum von V ist definiert als $V^* := \mathrm{Hom}(V, K)$ (dies ist ein Vektorraum bezüglich punktweiser Addition und Skalarmultiplikation von Homomorphismen). Zeigen Sie, dass

$$q_U^* : (V/U)^* \to V^*$$

injektiv ist und die durch Einschränkung auf U induzierte Abbildung

$$V^* \to U^*, \pi \mapsto \pi_U$$

einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} V^*/q_U^*((V/U)^*) &\xrightarrow{\sim} U^* \\ [\pi] &\mapsto \pi_U \end{aligned}$$

induziert.

Übung 2 (3 + 1 + 0 Punkte)

1. Für eine Permutation $\sigma \in S_n$ betrachten wir die Menge der *Fehlstände*

$$F(\sigma) := \{(i, j) \mid i, j \in \mathbb{N}, 1 \leq i < j \leq n \text{ und } \sigma(i) > \sigma(j)\}.$$

Zeigen Sie: $\mathrm{sign}(\sigma) = (-1)^{\#F(\sigma)}$.

2. Bestimmen Sie die Determinante der folgenden Matrix
$$M_x := \begin{pmatrix} x & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & x & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & x \end{pmatrix} \in M_n(K)$$
für $x \in K$ beliebig.

3. Berechnen Sie das Signum der folgenden Permutationen:
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 1 & 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$,
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 1 & 3 & 5 & 4 & 2 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.

Übung 3 (2 + 2 Punkte)
Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} t+1 & 1 & -1 \\ t-1 & t+2 & -1 \\ 1 & t-1 & 0 \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{Q}$ beliebig.

Übung 4 (4 Punkte)
Sei K ein Körper und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$. Zeigen Sie:
$$\det \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (\alpha_i - \alpha_j)\,.$$

Dieses Blatt kann bis spätestens **14:00 Uhr** am **Montag, den 22.01.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutor*innen im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben.