Lineare Algebra

Übungsblatt 1

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya 12.10.2017

Übungen: M. Nickel

Übung 1 (0+0+1+3 Punkte)

1. In der Klasse 5a gibt es 18 Kinder, die Französisch lernen, 15 Kinder, die Spanisch lernen, 5 Kinder, die beide Sprachen lernen. Angenommen, dass jedes Kind mindestens eine Sprache lernt, wie viele Kinder gibt es in der Klasse?

2. In der Klasse 5b gibt es 20 Kinder die Chinesisch lernen, 19, die Russisch lernen, 18 Kinder, die Türkisch lernen. Es gibt 6, die Chinesisch und Türkisch, 5, die Chinesisch und Russisch, und 4, die Türkisch und Russisch lernen. Jedes Kind lernt mindestens eine der drei Sprachen, und es gibt eines, das alle drei lernt. Wie viele Kinder gibt es in der Klasse?

3. Es sei jetzt X eine endliche Menge, $A_1, A_2, A_3 \subseteq X$ drei Teilmengen. Man schreibe a_i für die Anzahl von Elementen von A_i, a_{ij} für $|A_i \cap A_j|$ usw.. Zeigen Sie, dass

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = (a_1 + a_2 + a_3) - (a_{12} + a_{13} + a_{23}) + a_{123} \ .$$

4. Es sei jetzt X eine endliche Menge, m eine positive ganze Zahl, $A_1, \ldots, A_m \subseteq X$ Untermengen. Zeige, dass

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_m| = \sum_{\varnothing \neq I \subset \{1,\ldots,m\}} (-1)^{\#I+1} a_I \ ,$$

wobei $\#I$ die Anzahl der Elemente von I bezeichnet und $a_I = \# \bigcap_{i \in I} A_i$.

Übung 2 (0+4 Punkte)
Man schreibe [m] für die Menge, deren Elemente die Zahlen $1, \ldots, m$ sind.

1. Beschreibe alle injektive/surjektive/bijektive Abbildungen von [3] nach [2], [2] nach [4],[1] nach [m], [m] nach [2], [m] nach [m+1], und [m] nach [m-1]?

2. Wie viele injektive/surjektive/bijektive Abbildungen gibt es von [m] nach [n]?

Übung 3 (1+1+1+1 Punkte)
Wegen einiger seltsamer Zwischenfälle in einem abgelegenen Irrenhaus sind Patienten und Ärzte nicht durch bloßes Ansehen zu unterscheiden. Ihr Job ist, einen Weg zu finden, sie zu unterscheiden.

- Es gibt 101 Menschen in der Anstalt, wobei mehr Ärzte als Patienten vorhanden sind. Jede Person im Gebäude ist entweder Arzt oder Patient.

- Es gibt einen Weg, Informationen von ihnen zu bekommen: man kann Person A fragen, was sie über den Geisteszustand von Person B denkt.
- Als Antwort wird ein Arzt stets die Wahrheit sagen, während ein Patient irgendetwas sagen kann.

Finden Sie nun die Antworten auf folgende Fragen:

1. Finden Sie einen Weg, einen Arzt zu finden.
2. Finden Sie einen Weg, Ärzte von Patienten zu unterscheiden.
3. Was kann man tun, falls die Anzahl von Ärzten kleiner oder gleich der Anzahl von Patienten ist?
4. Wieviele Fragen braucht man, um einen Arzt zu finden? Wieviele braucht man, um einen Arzt von einem Patienten zu unterscheiden?

Übung 4 (2+2 Punkte)

1. Das folgende Argument zeigt, dass jede Person in einer Gruppe dieselbe Augenfarbe hat. Wir argumentieren mit Induktion. Falls es nur eine Person in der Gruppe gibt, dann gibt es nur eine Augenfarbe und die Aussage ist wahr. Für die Induktionsvoraussetzung nehmen wir an, dass es nur eine Augenfarbe gibt in einer Gruppe der Größe n; betrachten wir nun eine Gruppe von $n+1$ Personen und nummerieren die Personen darin mit $1, \ldots, n+1$.

   Betrachte die Mengen $1, 2, \ldots n$ und $2, 3, \ldots, n+1$. Jede Menge enthält n Personen, hat damit nach Induktionsvoraussetzung nur eine Augenfarbe, aber die Mengen haben eine nichtleere Schnittmenge, damit gibt es nur eine Augenfarbe in der gegebenen Gruppe von $n+1$ Personen. Wo ist der Fehler?

2. Zeigen Sie mithilfe von Induktion den binomischen Satz: für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \ .$$

Übung 5 (Zusatzaufgabe)
Ein Hersteller von Murmeln testet sein Produkt, indem Murmeln von verschiedenen Stockwerken des 100-stöckigen Bürogebäudes des Herstellers fallen gelassen werden. Damit soll das höchste Stockwerk F zu gefunden, von welchem die Murmeln fallen gelassen werden können ohne zu zerbrechen.

1. Angenommen man hat nur eine Murmel: wie oft muss man sie fallen lassen, um F zu finden?
2. Angenommen man hat nun zwei Murmeln: wie oft muss man sie fallen lassen, um F zu finden?

3. Wie viele Stockwerke hat das höchste Gebäude, in dem man das korrekte Stockwerk F mit k mal Fallenlassen bestimmen kann, wenn man zwei Murmeln hat? Versuchen Sie zunächst das Ergebnis für $k = 2, 3, 4$ zu finden.

4. Finden Sie eine rekursive Formel für die höchste Zahl $n(k, m)$ von Stockwerken, die ein Gebäude haben kann, bei dem man das Murmel-Test Problem mit m Murmeln und k mal Fallenlassen lösen kann.

5. Zeigen Sie:

$$n(k, m) = \sum_{i=0}^{m} \binom{k}{i} - 1 \ .$$

Dieses Blatt kann bis spätestens **14:00 Uhr** am **Freitag, den 27.10.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben.