Lineare Algebra

Übungsblatt 10

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya 16.01.2017

Übungen: M. Nickel

Übung 1 (0 + 4 Punkte)

1. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichungssysteme:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystem in Abhänigigkeit von a:

$$\begin{pmatrix} 4-3a & 6-4a & \frac{1}{2} \\ 2a-2 & 3a-3 & -\frac{1}{4} \\ 4-4a & 8-8a & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Übung 2 (1 + 1 + 2 Punkte)

1. Sei $R \in M_{n\times m}(K)$ in Zeilenstufenform. Beschreiben Sie, wie man mit Spaltenoperationen, also durch Multiplikation durch Elementarmatrizen von rechts (das Produkt all dieser sei T) die folgende Form erhält:

$$RT = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \alpha_r & & & \\ & & & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dabei sind die Spalten rechts und Zeilen unten aus lauter Nullen optional.

2. Schließen Sie, dass es für eine beliebige Matrix $A \in M_n(K)$ Produkte von Elementarmatrizen $S \in M_n(K)$ und $T \in M_m(K)$ gibt mit

$$SAT = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \alpha_r & & & \\ & & & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} =: D$$

3. Sei nun $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ invertierbar. Schließeen Sie, dass dann D auch invertierbar ist und daher $n = r$. Schreiben Sie das Inverse von D hin und zeigen Sie
$$A^{-1} = TD^{-1}S.$$
Bemerkung: Auf diese Weise kann man mittels Gauß-Elimination, zuerst für Zeilen, dann für Spalten, das Inverse einer invertierbaren Matrix bestimmen.

Übung 3 (2 + 2 Punkte)
Betrachten Sie die lineare Abbildung, die bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ durch folgende Matrix gegeben ist:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 7 & 8 & 4 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Bestimmen Sie eine Basis für den Kern der linearen Abbildung.

2. Bestimmen Sie eine Basis für das Bild der linearen Abbildung.

Übung 4 (4 Punkte)
Gegeben sei folgende Matrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & i & -1 \\ 1+i & 1 & 1+2i \\ 1-i & 2 & 1+i \\ -i & 1-i & 1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 3}(\mathbb{C}).$$

Bestimmen Sie

1. den Rang von A,

2. eine Basis von $\mathrm{Bild}(L_A)$, bestehend aus Spaltenvektoren,
3. eine Basis von $\mathrm{Ker}(L_A)$.

Dieses Blatt kann bis spätestens **14:00 Uhr** am **Montag, den 22.01.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutor*innen im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben.