Übungen zur Vorlesung Algebraische Geometrie III

Übungsblatt 5

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya
Übungen: M. Nickel

Übung 1

(a) Betrachte den Polynomring $\mathbb{Q}[n_1, \ldots, n_t]$. Zeige zunächst, dass die Polynome $\binom{n_1+i_1}{i_1}, \ldots, \binom{n_t+i_t}{i_t}, i_k \geq 0$ eine Basis von $\mathbb{Q}[n_1, \ldots, n_t]$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum bilden. $f \in \mathbb{Q}[n_1, \ldots, n_t]$ nennt man numerisches Polynom, falls für alle $(n_1, \ldots, n_t) \in \mathbb{Z}^t$ gilt: $f(n_1, \ldots, n_t) \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass dies dazu äquivalent ist, dass f eine $\mathbb{Z}$-Linearkombination von $\binom{n_1+i_1}{i_1}, \ldots, \binom{n_t+i_t}{i_t}$ ist.

(b) Sei X eine vollständige Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k, F ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul und $L_1, \ldots, L_t$ invertierbare Garben. Dann ist die Funktion

$$f_F(n_1, \ldots, n_t) := \chi(F \otimes L_1^{n_1} \otimes \cdots \otimes L_t^{n_t})$$

ein numerisches Polynom in $n_1, \ldots, n_t$ mit $\deg(f_F) \leq \dim(\mathrm{Supp}(F)))$.