Übungen zur Vorlesung Algebraische Geometrie III

Übungsblatt 4

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya
Übungen: M. Nickel

Übung 1 Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X.

(a) Sei $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$ ist eine offene Überdeckung $\mathcal{V} = (V_i)_{i\in J}$ zusammen mit einer Abbildung $\lambda : J \to I$ der Indexmengen, sodass für alle $j \in J$ gilt $V_j \subset U_{\lambda(j)}$. Zeige, dass es für eine Verfeinerung $\mathcal{V}$ von $\mathcal{U}$ eine natürliche induzierte Abbildung der Čech Kohomologie für jede Garbe abelscher Gruppen $\mathcal{F}$ und für jedes $i \geq 0$:

$$\lambda^i : \check{H}^i(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^i(\mathcal{V}, \mathcal{F}) .$$

Die Überdeckungen von X sind eine partiell geordnete Menge unter Verfeinerung, sodass man den Grenzwert der Čech Kohomologie

$$\varinjlim_{\mathcal{U}} \check{H}^i(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

betrachten kann.

(b) Zeige: für jede Garbe abelscher Gruppen $\mathcal{F}$ auf X ist die natürliche Abbildung

$$\check{H}^i(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^i(X, \mathcal{F})$$

kompatibel mit den Verfeinerungsabbildungen.

(c) Zeige, dass für einen topologischen Raum X und eine Garbe abelscher Gruppen $\mathcal{F}$ auf X die natürliche Abbildung

$$\varinjlim_{\mathcal{U}} \check{H}^i(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^i(X, \mathcal{F})$$

ein Isomorphismus ist.

Übung 2 Für einen beliebigen geringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ sei $\operatorname{Pic} X$ die Gruppe der Isomorphieklassen von invertierbaren Garben auf X. Zeige, dass $\operatorname{Pic} X \cong H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$.