Übungen zur Vorlesung Algebraische Geometrie III

Übungsblatt 2

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya
Übungen: M. Nickel

Übung 1 Sei X eine Varietät und $\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe auf X. Wir betrachten nun die Funktion

$$\varphi(x) := \dim_{k(X)} \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} k(x)\,,$$

wobei $k(x) = \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x$ der Restklassenkörper am Punkt x ist. Man benutze nun das Nakayama Lemma, um folgende Aussagen zu zeigen:

(a) Die Funktion φ ist oberhalbstetig, das heißt die Menge $\{x \in X \mid \varphi(x) \geq n\}$ ist für alle $n \in \mathbb{Z}$ abgeschlossen.

(b) Ist $\mathcal{F}$ lokal frei und X zusammenhängend, so ist φ konstant.

(c) Ist φ konstant, so ist $\mathcal{F}$ lokal frei.

Übung 2

Betrachte $X = V(y^2 - xz) \subset \mathbb{C}^3$ und sei $R = \mathbb{C}[x,y,z]/\langle y^2 - xz\rangle$ der Koordinatenring.

- Zeige: die Gerade $L = V(y,z)$ ist ein Weil Divisor, der nicht Cartier ist, allerdings ist $2L$ Cartier.
- $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(-L))$ ist das Ideal $\langle y,z\rangle \subset R$.
- $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(-2L))$ ist das Ideal $\langle z\rangle \subset R$ (Hauptideal, da $-2L$ Cartier ist).
- Auf globalen Schnitten ist das Bild der Abbildung

  $$\mathcal{O}_X(-L) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-L) \to \mathcal{O}_X(-2L)$$

  genau $\langle y,z\rangle^2$, was wiederum eine echte Teilmenge von $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(-2L) = \langle z\rangle$ ist. Daher folgt: $\mathcal{O}_X(-L) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-L) \ncong \mathcal{O}_X(-2L)$.