Übungen zur Vorlesung Algebraische Geometrie I

Übungsblatt 9

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya — Übungen: M. Nickel

Übung 1 (Präsenz)
Ein geringter Raum ist ein Paar $(X, \mathcal{O}_X)$ bestehend aus einem topologischen Raum X und einer Garbe von Ringen $\mathcal{O}_X$ auf X. Ein Morphismus von geringten Räumen $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ist ein Paar $(f, f^\#)$ bestehend aus einer stetigen Abbildung $f : X \to Y$ und aus einem Morphismus $f^\# : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$. $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt lokal geringter Raum, falls $\mathcal{O}_{X,P}$ ein lokaler Ring ist für alle $P \in X$. Ein Morphismus $(f, f^\#)$ von lokal geringten Räumen $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ist ein Morphismus von geringten Räumen, so dass die induzierte Abbildung $f_P^\# : \mathcal{O}_{Y,f(P)} \to \mathcal{O}_{X,P}$ ein lokaler Homomorphismus von lokalen Ringen ist für alle $P \in X$.
Zeige:

(a) Ist A ein Ring, so ist $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O})$ ein lokal geringter Raum.

(b) Ist $\varphi : A \to B$ ein Homomorphismus von Ringen, so induziert φ einen Morphismus von lokal geringten Räumen

$$(\mathrm{Spec}(B), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B)}) \to (\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}) .$$

(c) Sind A und B Ringe, so ist jeder Morphismus von lokal geringten Räumen von $\mathrm{Spec}(B)$ nach $\mathrm{Spec}(A)$ induziert durch einen Homomorphismus von Ringen $\varphi : A \to B$ wie in b).

Übung 2 (Abgabe)
Sei R ein diskreter Bewertungsring. Dann ist $\mathrm{Spec}(R)$ ein affines Schema, das aus zwei Punkten besteht. Ein abgeschlossener Punkt t_0 mit lokalem Ring R und ein Punkt t_1, der offen und dicht ist, mit lokalem Ring $K = \mathrm{Quot}(R)$. Zeige, dass der Morphismus von geringten Räumen, der den eindeutigen Punkt von $\mathrm{Spec}(K)$ auf t_0 abbildet, wobei $f^\#$ vermöge der Inklusion $R \to K$ definiert ist, nicht von einem Ringhomomorphismus $R \to K$ induziert wird.

Übung 3 (Abgabe)
Ein Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt reduziert, falls für alle offenen Mengen $U \subset X$ der Ring $\mathcal{O}_X(U)$ keine nilpotenten Elemente hat.

(a) Zeige: $(X, \mathcal{O}_X)$ reduziert genau dann, wenn $\mathcal{O}_{X,P}$ keine nilpotenten Elemente hat für alle $P \in X$.

(b) Sei $(\mathcal{O}_X)_{\mathrm{red}}$ die Garbe assoziiert zur Prägarbe $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)_{\mathrm{red}}$ (für einen Ring A sei A_{red} der Quotient von A nach dem Ideal der nilpotenten Elemente). Zeige, dass $(X, (\mathcal{O}_X)_{\mathrm{red}})$ ein Schema ist, man nennt es das reduzierte Schema assoziiert zu X. Zeige, dass weiterhin ein Morphismus $X_{\mathrm{red}} \to X$ existiert, der ein Homöomorphismus der zugrunde liegenden toplogischen Räume ist.

(c) Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata mit X reduziert. Zeige, dass eine eindeutige Abbildung $g : X \to Y_{\mathrm{red}}$ existiert, so dass man f durch Komposition von g mit der natürlichen Abbildung $Y_{\mathrm{red}} \to Y$ erhält.

Übung 4 (Präsenz)

(a) Sei R ein normaler Integritätsbereich und $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal der Kodimension 1. Man zeige, dass $R_{\mathfrak{p}}$ ein diskreter Bewertungsring ist.

(b) Sei X eine normale Varietät und $D \subset X$ ein Primdivisor (eine irreduzible abgeschlossene Untervarietät der Kodimension 1). Zeige, dass $\mathcal{O}_{X,D}$ ein diskreter Bewertungsring ist.

Bemerkung: $\mathrm{Div}(X)$ ist definiert als die freie abelsche Gruppe, die von allen Primdivisoren auf X erzeugt wird. Elemente dieser Gruppe heißen Weil-Divisoren.

Übung 5 (Abgabe)
Sei X eine normale Varietät und $f \in K(X)^*$. Zeige, dass $\nu_D(f)$ für alle außer endlich vielen Primdivisoren $D \subset X$ verschwindet.

Übung 6 (Übung)
Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume. Für eine Garbe $\mathscr{G}$ auf Y definiert man eine Garbe $f^{-1}\mathscr{G}$ auf X als die Garbifizierung der Garbe, die durch $U \to \lim_{V \supset f(U)} \mathscr{G}(V)$ gegeben ist, wo $U \subset X$ offen und V alle offenen Mengen $V \subset Y$ durchläuft, die $f(U)$ enthalten.
Zeige, dass für eine Garbe $\mathscr{F}$ auf X eine natürliche Abbildung $f^{-1}f_*\mathscr{F} \to \mathscr{F}$ existiert und für jede Garbe $\mathscr{G}$ auf Y eine natürliche Abbildung $\mathscr{G} \to f_*f^{-1}\mathscr{G}$. Benutze diese Abbildungen um zu zeigen, dass es eine natürliche Abbildung von Mengen für alle Garben $\mathscr{F}$ auf X und $\mathscr{G}$ auf Y gibt:

$$\mathrm{Hom}_X(f^{-1}\mathscr{G}, \mathscr{F}) = \mathrm{Hom}_Y(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F}) \ .$$

Man sagt daher, dass f^{-1} linksadjungiert zu f_* und f_* rechtsadjungiert zu f^{-1} ist.