Übungen zur Vorlesung Algebraische Geometrie I

Übungsblatt 7

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya — Übungen: M. Nickel

Übung 1 (Präsenz)
Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus affiner Varietäen und $f^* : K(X) \to K(Y)$ die dazugehörige Abbildung der Koordinatenringe. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a) f surjektiv genau dann, wenn f^* injektiv.

(b) f injektiv genau dann, wenn f^* surjektiv.

(c) Ist $f : \mathbb{A}^1_K \to \mathbb{A}^1_K$ ein Isomorphismus, so ist f affin linear.

(d) Ist $f : \mathbb{A}^2_K \to \mathbb{A}^2_K$ ein Isomorphismus, so ist f affin linear.

Übung 2 (Abgabe)

(a) Ein affiner Kegelschnitt ist die Nullstellenmenge eines einzigen irreduziblen Polynoms in $K[x_1, x_2]$ vom Grad 2. Zeige, dass jeder affine Kegelschnitt über einem Körper der Charakteristik ungleich 2 zu genau einer der Varietäten $V(x_2 - x_1^2)$ und $V(x_1x_2 - 1)$ isomorph ist, wobei der Isomorphismus durch eine linear Koordinatentransformation gegeben ist.

(b) Sei $X \subset \mathbb{A}^2_K$ die Nullstellenmenge des Polynoms $\sum_{i+j\leq d} a_{i,j}x_1^i x_2^j$ vom Grad höchstens d. Zeige:

- Jede Gerade in $\mathbb{A}^2_K$, die nicht in X enthalten ist, schneidet X in höchstens d Punkten.
- Jeder affine Kegelschnitt (wieder $\mathrm{Char}(K) \neq 2$), der nicht in X enthalten ist, schneidet X in höchstens $2d$ Punkten.

Übung 3 (Übung)
Welche der folgenden geringten Räume sind isomorph über $\mathbb{C}$?

(a) $\mathbb{A}^1 \setminus \{1\}$

(b) $V(x_!^2 + x_2^2) \subset \mathbb{A}^2$

(c) $V(x_2 - x_1^2, x_3 - x_1^3) \setminus \{0\} \subset \mathbb{A}^3$

(d) $V(x_1x_2) \subset \mathbb{A}^2$

(e) $V(x_2^2 - x_1^3 - x_1^2) \subset \mathbb{A}^2$

(f) $V(x_1^2 - x_2^2 - 1) \subset \mathbb{A}^2$

Übung 4 (Präsenz)
Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Bewertung $\nu : K^* \to \mathbb{Z}$. Zeige:

(a) $x \in R$ ist invertierbar in R genau dann, wenn $\nu(x) = 0$.

(b) R ist ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} = \{x \in R \mid \nu(x) > 0\} \cup \{0\}$.

(c) R ist normal.

(d) R ist ein Hauptidealring.

(e) R ist noethersch.

(f) Die einzigen echten Primideale in R sind 0 und $\mathfrak{m}$.

Übung 5 (Abgabe)
Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Integritätsbereich der Dimension 1. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) R ist ein diskreter Bewertungsring.

(b) R ist normal.

(c) $\mathfrak{m}$ ist ein Hauptideal.

(d) $(R, \mathfrak{m})$ ist ein regulärer lokaler Ring.

Übung 6 (Abgabe)
Sei X ein topologischer Raum, $P \in X$ und sei A eine abelsche Gruppe. Definiere eine Garbe $i_P(A)$ auf X folgendermaßen: $i_P(A)(U) = A$, falls $P \in U$, 0 sonst. Zeige, dass der Halm dieser Garbe A ist für jeden Punkt $Q \in \overline{\{P\}}$ und 0 sonst. Man nennt diese Garbe Wolkenkratzergarbe. Zeige weiterhin, dass $i_P(A) = i_*(A)$, wobei A die konstante Garbe A auf $\overline{\{P\}}$ und $i : \overline{\{P\}} \to X$ die Inklusion.