Übungen zur Vorlesung Algebraische Geometrie I

Übungsblatt 5

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya — Übungen: M. Nickel

Übung 1 (Präsenz)
Verallgemeinere den Beweis von Beispiel 3.14 um zu zeigen: $\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(X) = K[X]$ für eine offene Teilmenge U einer affinen Varietät X mit der Eigenschaft, dass $K[X]$ ein UFD ist und U das Komplement einer irreduziblen Untervarietät der Kodimension mindestens 2 in X ist.

Übung 2 (Abgabe)
Sei $X \subset \mathbb{A}^n_K$ eine affine Varietät und sei $a \in X$ ein Punkt. Zeige, dass $\mathcal{O}_{X,a} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_K,a}/I(X)\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_K,a}$, wobei $I(X)\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_K,a}$ das Ideal in $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_K,a}$ bezeichne, das von allen Quotienten $f/1$ mit $f \in I(X)$ erzeugt wird.

Übung 3 (Übung)
Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf einem topologischen Raum X und sei $a \in X$. Zeige, dass der Halm $\mathcal{F}_a$ ein lokales Objekt in folgendem Sinn ist: ist $U \subset X$ eine offene Umgebung von a, so ist $\mathcal{F}_a$ isomorph zum Halm von $\mathcal{F} \mid U$ bei a auf dem topologischen Raum U.

Übung 4 (Präsenz)
Sei $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Prägarben abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X. Zeige, dass f für $a \in X$ einen Morphismus $f_a : \mathcal{F}_a \to \mathcal{G}_a$ auf den Halmen induziert.

Übung 5 (Übung)
Zeige, dass die konstante Garbe eine Garbe ist.

Übung 6 (Abgabe)

(a) Sei $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Garben auf X. zeige, dass φ surjektiv genau dann ist, wenn folgendes gilt: für alle offenen Mengen $U \subset X$ und für alle $s \in \mathcal{G}(U)$ existiert eine Überlagerung $\{U_i\}$ von U und Elemente $t_i \in \mathcal{F}(U_i)$, sodass $\varphi(t_i) = s \mid_{U_i}$ für alle i.

(b) Gib ein Beispiel eines surjektiven Morphismus $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ und einer offenen Menge U an mit der Eigenschaft, dass $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ nicht surjektiv ist.

Übung 7 (Abgabe)

(a) Sei $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Garben auf X. Zeige, dass für $P \in X$ gilt $(\ker \varphi)_P = \ker(\varphi_P)$ und $(\mathrm{Bild}\, \varphi)_P = (\mathrm{Bild}\, \varphi_P)$

(b) Zeige, dass φ injektiv (respektive surjektiv) ist genau dann, wenn die induzierte Abbildung der Halme φ_P injektiv (respektive surjektiv) für alle P ist.

(c) Zeige, dass die Sequenz $\cdots \to \mathcal{F}^{i-1} \to \mathcal{F}^{i} \to \mathcal{F}^{i+1} \to \dots$ von Garben und Morphismen exakt ist genau dann, wenn die korrespondierende Sequenz der Halme für alle $P \in X$ exakt als Sequenz abelscher Gruppen ist.

Übung 8 (Abgabe)
Sei U eine offene Teilmenge eines topologischen Raumes X. Zeige, dass der Funktor $\Gamma(U, \cdot)$, der Garben auf X auf abelsche Gruppen abbildet, linksexakt ist. Man beachte, dass dieser Funktor nicht exakt sein muss.

Übung 9 (Übung)
Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ zwei Garben auf dem topologischen Raum X. zeige, dass die Prägarbe $U \mapsto \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U)$ eine Garbe ist. Man nennt sie *direkte Summe von $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$* und schreibt $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$. Zeige, dass $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ die direkte Summe in der Kategorie der Garben von abelschen Gruppen auf X ist.

Übung 10 (Übung)
Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X und sei $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $U \subset X$ offen. Der *Träger* von s, Schreibweise $\mathrm{Supp}(s)$, ist definiert als $\{P \in U \mid s_P \neq 0\}$, wobei s_P der Keim von s in $\mathcal{F}_P$ sei. Zeige, dass der Träger von s eine abgeschlossene Teilmenge von U ist. Weiterhin sei der Träger von $\mathcal{F}$, Schreibweise $\mathrm{Supp}(\mathcal{F})$ definiert als $\{P \in U \mid \mathcal{F}_P \neq 0\}$. Dies muss keine abgeschlossene Teilmenge sein.