

Übungen zur Vorlesung Algebraische Geometrie I
Übungsblatt 4

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya

Übungen: M. Nickel

Übung 1 (Präsenz)

Es sei R ein noetherscher Ring, $I, J \triangleleft R$. Dann existiert ein Ideal $J' \triangleleft R$ und eine natürliche Zahl m für welche $IJ = I' \cap J$ und $I' \supseteq I^m$. Für eine beliebige natürliche Zahl n gibt es $k \gg 0$ mit der Eigenschaft, dass $I^n \cdot J = I^k \cap J$. Man schreibe jetzt $L = \bigcap_{n=1}^{\infty} I^n$. Dann gilt $I^m \cdot L = L$ für all $m \in \mathbb{N}$.

Übung 2 (Abgabe)

(Krullscher Schnittsatz) Es sei R ein noetherscher Ring, $I \subseteq \text{Jac}(R)$ ein Ideal in R . Dann gilt $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = 0$. (Hinweis: benutze Nakamaya's Lemma).

Übung 3 (Präsenz)

Sei R ein Ring. Für ein Primideal $P \triangleleft R$ und $n \in \mathbb{N}$ betrachte man

$$P^{(n)} := \{a \in R \mid ab \in P^n \text{ für ein } b \in R \setminus P\}$$

genannt die n -te symbolische Potenz von P . Zeige:

- (a) $P^n \subset P^{(n)} \subset P$.
- (b) $P^{(n)}$ ist P -primär.
- (c) $P^{(n)}R_P = P^nR_P$.

Übung 4 (Abgabe)

Für jede der Ringerweiterungen

- $\mathbb{R}[y] \subset \mathbb{R}[x, y]/(x^2 - y)$
- $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[x]/(x^2 - 3)$

finde man

- (a) ein Primideal $0 \neq P \triangleleft R$ mit einem eindeutigen Primideal $P' \triangleleft R'$, das über P liegt und $R'/P' \cong R/P$;
- (b) ein Primideal $0 \neq P \triangleleft R$ mit einem eindeutigen Primideal $P' \triangleleft R'$, das über P liegt und $R'/P' \not\cong R/P$;
- (c) ein Primideal $0 \neq P \triangleleft R$, sodass es mehr als ein Primideal in R' gibt, das über P liegt.

Man nennt in diesen drei Fällen P verzweigt, träge und zerlegt.

Übung 5 (Übung)

Gebe ein Beispiel eines nicht noetherschen Ringes von endlicher Dimension.

Übung 6 (Übung)

Es seien $f, g: X \rightarrow Y$ stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen, Y Hausdorffsch. Man zeige, dass die Untermenge $\Delta_{f,g} := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \subseteq X$ abgeschlossen ist. Zeige auch, dass diese Eigenschaft Hausdorffsch charakterisiert (wie läuft die richtige Umkehrung?).

Übung 7 (Abgabe)

Sei X eine affine Varietät gedacht als topologischer Raum (versehen mit der Zariski-Topologie τ). Zeige, dass für jede offene Menge $U \subseteq X$, der topologischer Raum $(U, \tau|_U)$ quasi-kompakt ist.

Übung 8 (Abgabe)

Berechne die Dimension und alle maximalen Ideale von $\mathbb{C}[x, y, z]/(x^2 - y^2, z^2x - z^2y)$.

Übung 9 (Übung) **

Es seien $V \subseteq X$ affine Varietaeten mit $\text{codim}_X V = e$, schreibe $P = I_X(V)$. Dann gilt $P^{(em)} \subseteq P^m$ für jede $m \in \mathbb{N}$.

Übung 10 (Übung)

Berechne die Dimension von $K[[x_1, \dots, x_n]]$.