Definition 0.1 (Ganz abgeschlossen und normal) *Es seien $A \leq B$ Ringe. Falls gilt: jedes Element $b \in B$ ganz über A liegt automatisch in A, dann sagen wir, dass A* ganz abgeschlossen in B ist. *Ein Integritätsbereich ganz abgeschlossen in seinem Quotientkörper heißt ein* normaler Ring. *Eine irreduzible affine Varietät X heißt* normal, *falls ihr Koordinatenring $K[X]$ ein normaler Ring ist.*

Übung 1 (Präsenz)
Ein UFD ist ein normaler Ring.

Übung 2 (Abgabe)
Lokalisierung kommutiert mit ganzem Abschluss. Insbesondere jede Lokalisierung von einem normalen Ring ist wieder normal.

Übung 3 (Übung)
Ein Integritätssbereich R ist normal dann und genau dann, wenn $R_{\mathfrak{m}}$ normal ist für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \lhd R$.

Übung 4 (Übung)
Es seien R_i normale Ringe mit dem gleichem Quotientenkörper. Zeige, dass auch $\cap_{i \in I} R_i$ normal ist.

Übung 5 (Präsenz)
Zeige, dass die Varietät $V(x^2 - y^3) \subseteq \mathbb{A}^2_K$ nicht normal ist.

Definition 0.2 (Normalisierung von affinen Varietäten) *Es sei X eine affine Varietät mit Koordinatenring $K[X]$, man schreibe $K[X]' =: K[Y]$ für seinen ganzen Abschluss in $K(X)$. Der Morphismus von Varietäten $\nu_X \colon Y \to X$, der der natürlichen Inklusion $K[X] \hookrightarrow K[X]'$ entspricht, heißt die* Normalisierung von X.

Übung 6 (Präsenz)
Beweise, dass die Definition der Normalisierung sinnvoll ist. Ohne Beweis: $K[X]'$ ist eine endlich erzeugte K-Algebra. Berechne die Normalisierung von $V(x^2 - y^3)$.

Übung 7 (Abgabe)
Es seien X, Y irreduzible affine Varietäten. Beweise, dass auch $X \times Y$ irreduzibel ist.

Übung 8 (Übung)
Es sei (X, τ) ein topologischer Raum. Zeige, das X dann und genau dann Hausdorffsch ist, wenn $\Delta \subseteq X \times X$ abgeschlossen ist bzg der Produkt-Topologie.

Übung 9 (Abgabe)
Sei X die Menge aller 2×3 Matrizen über einem Körper K, die höchstens Rang 1 haben, als Teilmenge von $\mathbb{A}^6_K = \mathrm{Mat}(2 \times 3, K)$. Zeige, dass X eine affine Varietät ist. Ist sie irreduzibel? Was ist ihre Dimension?

Im Folgenden benutzen wir die Verschwindungsordnung von Polynomen um die Geometrie affiner Varietäten zu studieren. Was wir machen ist eine Verallgemeinerung des Verschwindungsideals $I(X)$ einer affinen Varietät (oder allgmeiner einer Teilmenge des affinen Raumes).

Definition 0.3 *(Symbolische Potenzen von Verschwindungsidealen) Sei $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ eine affine Varietät. Wir definieren die m^{te}* symbolische Potenz von $I(X)$ *als*

$$I(X)^{\langle m \rangle} := \{f \in k[x_1, \ldots, x_n] \mid f \textit{ verschwindet zur Ordung } m \textit{ auf } X\} \lhd k[x_1, \ldots, x_n].$$

Die Beziehung zwischen normalen und symbolischen Potenzen ist eine wichtige Frage, die bis heute nicht vollständig klar ist.

Übung 10 (Abgabe)
Zeige, dass symbolische Potenzen in der Tat Ideale sind. Zeige, dass Potenzen und symbolische Potenzen von linearen Unterräumen übereinstimmen.

Übung 11 (Übung, schwieriger)
Sei $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ ein beliebiges Polynom, $X = V(f) \subseteq \mathbb{A}_k^n$. Dann gilt

$$I(X)^{\langle m \rangle} = I(X)^m \quad \text{für alle } m \leq 1.$$