Übungen zur Vorlesung Algebraische Geometrie I

Übungsblatt 13

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya — Übungen: M. Nickel

Übung 1 (Präsenz)
Definiere den Tangentialraum einer affinen Varietät in einem Punkt, der nicht notwendigerweise der Ursprung ist.

Übung 2 (Präsenz)
Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Varietäten und sei $a \in X$. Zeige, dass f eine lineare Abbildung $T_a X \to T_{f(a)} Y$ der Tangentialräume induziert.

Übung 3 (Abgabe)
Zeige das *projektive Jacobi Kriterium*: Sei $X \subset \mathbb{P}^n$ eine projektive Varietät mit homogenem Ideal $I(X) = (f_1, \dots, f_r)$ und sei $a \in X$. Dann ist X glatt bei a genau dann, wenn der Rang der $r \times (n+1)$ Jacobi Matrix $(\partial f_i / \partial x_j(a))_{i,j}$ mindestens $n - \operatorname{codim}_X\{a\}$ ist.

Übung 4 (Präsenz)
Für $k \in \mathbb{N}$ sei X_k die affine Kurve $X_k := V(x_2^2 - x_1^{2k+1}) \subset \mathbb{A}^2$. Zeige, dass X_k nicht isomorph zu X_l für $k \neq l$ ist. Hinweis: betrachte den Blow-up von X_k im Ursprung.

Übung 5 (Abgabe)
Sei $X \subset \mathbb{P}^3$ die Grad 3 Veronese Einbettung von $\mathbb{P}^1$. X ist glatt, da es isomorph zu $\mathbb{P}^1$ ist. Man verifiziere dies direkt, indem man das projektive Jacobi Kriterium benutzt.

Übung 6 (Abgabe)
Exer 10.21 Sei X eine projektive Varietät der Dimension n. Zeige:

(a) Es gibt einen injektiven Morphismus $X \to \mathbb{P}^{2n+1}$.

(b) Im allgemeinen gibt es keinen solchen Morphismus, der ein Isomorphismus auf sein Bild ist.

Übung 7 (Abgabe)
Sei $\operatorname{char} K \neq 2$ und sei $f \in K[x_0, x_1, x_2]$ ein homogenes Polynom, dessen partielle Ableitungen $\partial f / \partial x_i$ für $i = 0, 1, 2$ nicht gleichzeitig an einem Punkt von $X = V_p(f) \subset \mathbb{P}^2$ verschwinden. Dann nennt man das Bild des Morphismus

$$F : X \to \mathbb{P}^2, a \mapsto (\partial_f / \partial x_0(a) : \partial f / \partial x_1(a) : \partial f / \partial x_2(a))$$

die *duale Kurve* zu X.

(a) Finde eine geometrische Beschreibung von F. Was bedeutet $F(a) = F(b)$ für zwei unterschiedliche Punkte $a, b \in X$?

(b) Ist X ein Kegelschnitt, so ist $F(X)$ auch ein Kegelschnitt.

(c) Zeige für fünf beliebige Geraden in $\mathbb{P}^2$ in allgemeiner Lage, dass es einen Kegelschnitt gibt, an dem die Geraden Tangenten sind.