

Übungen zur Vorlesung Algebraische Geometrie I
Übungsblatt 11

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya

Übungen: M. Nickel

Übung 1 (Präsenz)

Sei $F : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^N$ die Grad d Veronese Einbettung (Konstruktion 7.27) mit $N = \binom{n+d}{n} - 1$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $X = F(\mathbb{P}^n)$ eine projektive Varietät ist. Finde explizite Gleichungen für X , das heißt Erzeuger eines homogenen Ideals I mit $X = V(I)$.

Übung 2 (Abgabe)

Sei $X \subset \mathbb{P}^3$ die Grad 3 Veronese Einbettung von \mathbb{P}^1 , das heißt das Bild des Morphismus

$$\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3, [x_0 : x_1] \mapsto [y_0 : y_1 : y_2 : y_3] = [x_0^3 : x_0^2 x_1 : x_0 x_1^2 : x_1^3].$$

Sei weiterhin $a := [0 : 0 : 1 : 0] \in \mathbb{P}^3$ und $L = V(y_2) \subset \mathbb{P}^3$. Man betrachte die Projektion f von a nach L (siehe Beispiel 7.6 (b)).

- (a) Zeige, dass f ein Morphismus ist.
- (b) Bestimme eine Gleichung der Kurve $f(X)$ in $L \cong \mathbb{P}^2$.
- (c) Ist $f : X \rightarrow f(X)$ ein Isomorphismus?

Übung 3 (Abgabe)

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine rationale Abbildung. Zeige, dass es dann eine bezüglich der Inklusion maximale offene Menge $U \subset X$ gibt, auf welcher die Abbildung ein Morphismus ist.

Übung 4 (Präsenz)

Sei $X \subset \mathbb{P}^n$ eine Quadrik, das heißt eine irreduzible Varietät, die die Nullstellenmenge eines homogenen Polynoms vom Grad 2 ist. Zeige, dass X birational, aber im Allgemeinen nicht isomorph, zu \mathbb{P}^{n-1} ist.

Übung 5 (Präsenz)

Eine Varietät Y ist rational, falls sie birational äquivalent zu \mathbb{P}^n für ein gewisses n ist (äquivalent dazu: $K(Y)$ ist eine rein transzendente Erweiterung von K).

- (a) Jeder Kegelschnitt in \mathbb{P}^2 ist eine rationale Kurve.
- (b) $y^2 = x^3$ ist eine rationale Kurve.
- (c) Sei Y die Kurve gegeben durch $y^2 z = x^2(x + z)$ in \mathbb{P}^2 . Zeige, dass die Projektion φ vom Punkt $P = [0 : 0 : 1]$ auf die Gerade $z = 0$ eine birationale Abbildung von Y auf \mathbb{P}^1 induziert. Insbesondere ist Y eine rationale Kurve.

Übung 6 (Abgabe)

Eine birationale Selbstabbildung von \mathbb{P}^2 heißt ebene Cremona-Transformation. Ein Beispiel ist die sogenannte quadratische Transformation $\varphi : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ gegeben durch $[a_0 : a_1 : a_2] \mapsto [a_1 a_2 : a_0 a_2 : a_0 a_1]$, wobei keine zwei Elemente von a_0, a_1, a_2 verschwinden sollen.

- (a) Zeige, dass φ birational und seine eigene Inverse ist.
- (b) Finde offene Mengen $U, V \subset \mathbb{P}^2$ mit $\varphi : U \rightarrow V$ Isomorphismus.
- (c) Finde die offenen Mengen, auf denen φ und φ^{-1} definiert sind und beschreibe die korrespondierenden Morphismen.

Übung 7 (Abgabe)

Seien X, Y zwei Varietäten und seien $P \in X$ und $Q \in Y$ gegeben mit $\mathcal{O}_{X,P} \cong \mathcal{O}_{Y,Q}$ als K -Algebren. Zeige, dass es dann offene Mengen $U \subset X$ und $V \subset Y$ gibt und einen Isomorphismus $U \rightarrow V$, der P auf Q abbildet.