Lineare Algebra zur Sekundarstufe I

Übungsblatt 3

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya 05.05.2016

Übungen: M. Nickel

Übung 1 (4 Punkte)
Sei $(V, +, \cdot)$ ein reller Vektorraum. Leiten Sie aus den Vektorraumaxiomen her:

(a) Zu $v \in V$ gibt es **genau ein** additives Inverses, also genau ein $v' \in V$ mit $v + v' = 0$.

(b) Es gilt $0 \cdot v = 0$ für alle $v \in V$.

Übung 2 (4 Punkte)
Überprüfen Sie, ob folgende Mengen Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$ sind:

(a) $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$

(b) $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$

(c) $V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x(y + 2z) = 0\}$.

Übung 3 (4 Punkte)
Sei $(V, +, \cdot)$ ein reeller Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$. Man sagt $v_1, \ldots, v_n$ sind *linear unabhängig* genau dann, wenn aus $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$ für $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ folgt, dass $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Begründen Sie dabei Ihre Antworten.

(a) Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig.

(b) Zwei Vektoren v_1, v_2 eines reellen Vektorraums sind genau dann linear abhängig, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit $\lambda v_1 = v_2$.

(c) Betrachte die Menge $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diese bildet einen Vektorraum mit Addition gegeben durch $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ für $f, g \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und Skalarmultiplikation gegeben durch $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Die Funktionen $f_1(x) = 5x^2 + x$, $f_2(x) = 2x + 3$ und $f_3(x) = 15x^2 + x - 3$ sind linear unabhängig in $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Übung 4 (4 Punkte)
Sei V ein reeller Vektorraum. Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ heißen *Erzeugendensystem* von V genau dann, wenn für jedes $v \in V$ Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ existieren mit $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$. Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem heißt *Basis* von V. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $v_1, \ldots, v_n$ ist eine Basis von V.

(b) $v_1, \ldots, v_n$ ist ein minimales Erzeugendensystem, d.h. $v_1, \ldots, v_n$ ist ein Erzeugendensystem und für alle $1 \leq i \leq n$ ist $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n$ kein Erzeugendensystem.

Dieses Blatt kann bis spätestens **12:00 Uhr** am **Freitag, den 13.05.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Schnellhefter, zusammen zu halten.