

Übungen zur Vorlesung Kommutative Algebra
Übungsblatt 9

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya

07.06.2016

Übungen: M. Nickel

Übung 1 (4 Punkte)

Sei M ein endlich erzeugter R -Modul und $\varphi : M \rightarrow A^n$ ein surjektiver Homomorphismus. Man zeige: $\ker(\varphi)$ ist endlich erzeugt.

Übung 2 (4 Punkte)

Seien R ein Ring, M endlich erzeugter R -Modul und φ ein R -Endomorphismus von M . Zeigen Sie, dass φ genau dann surjektiv ist, wenn φ ein Isomorphismus ist. Hinweis: man fasse M als $R[X]$ -Modul auf via $P(X)m := P(\varphi)(m)$ für $P(X) \in R[X], m \in M$.

Übung 3 (4 Punkte)

Sei $f : A \rightarrow B$ ein Ringhomomorphismus (insbesondere ist B ein A -Modul), $M = A^n$ der freie A -Modul vom Rang $n \in \mathbb{N}$ und N ein A -Modul. Zeigen Sie, dass $\varphi \otimes 1 \mapsto \varphi \otimes \text{id}$ einen B -Modulisomorphismus

$$\text{Hom}_A(M, N) \otimes_A B \cong \text{Hom}_B(M \otimes_A B, N \otimes_A B)$$

induziert.

Übung 4 (4 Punkte)

Sei $f : A \rightarrow B$ ein Ringhomomorphismus und N ein B -Modul. Man fasse N via f als A -Modul auf und betrachte den B -Modul $N_B := B \otimes_A N$. Zeigen Sie, dass der Homomorphismus $g : N \rightarrow N_B, y \mapsto 1 \otimes y$ injektiv ist und dass $g(N)$ ein direkter Summand in N_B ist.

Präsenzaufgaben Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.

Übung 5

(Konstruktion eines Gegenbeispiels zu Übung 3, falls M nicht frei ist.)

Sei K ein Körper und $R = K[X, Y]/(XY, Y^2)$. Weiterhin sei $f : R \rightarrow K$ gegeben durch

$$\left[\sum_{i,j} a_{ij} X^i Y^j \right] \mapsto a_{00}.$$

Zeigen Sie, dass der durch $\varphi \otimes 1 \mapsto \varphi \otimes \text{id}$ definierte K -Modulhomomorphismus

$$\text{Hom}_R(K, R) \otimes_R K \rightarrow \text{Hom}_K(K \otimes_R K, R \otimes_R K)$$

(wobei hier K vermöge f als R -Modul angesehen wird) weder injektiv noch surjektiv ist.

Dieses Blatt kann bis spätestens **12:00 Uhr** am **Montag, den 13.06.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Schnellhefter, zusammen zu halten.