

Übungen zur Vorlesung Kommutative Algebra
Übungsblatt 7

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya
Übungen: M. Nickel

23.05.2016

Übung 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie das 5er Lemma: sei R ein Ring und sei

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_4 & \xrightarrow{\varphi_4} & M_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ N_1 & \xrightarrow{\psi_1} & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & N_4 & \xrightarrow{\psi_4} & N_5 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von R -Moduln mit exakten Zeilen. Dann gilt:

- Wenn f_2 und f_4 injektiv und f_1 surjektiv sind, dann ist f_3 injektiv.
- Wenn f_2 und f_4 surjektiv und f_5 injektiv sind, dann ist f_3 surjektiv.
- Wenn f_1, f_2, f_4 und f_5 Isomorphismen sind, dann auch f_3 .

Übung 2 (4 Punkte)

Sei R ein Ring. Zeigen Sie: zu R -Moduln $M_i, i \in I$ existiert ein R -Modul $\bigoplus_{i \in I} M_i$ zusammen mit injektiven Modulhomomorphismen $\iota_j : M_j \rightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$ mit folgender universeller Eigenschaft:

zu jedem R -Modul T und R -Modulhomomorphismen $f_i : M_i \rightarrow T$ für alle $i \in I$ gibt es genau einen R -Modulhomomorphismus $f : \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow T$ mit $f_i = f \circ \iota_i$ für alle $i \in I$ (universelle Eigenschaft der Summe von R -Moduln).

Übung 3 (4 Punkte)

Sei R ein lokaler Ring, \mathfrak{m} sein maximales Ideal und sei M ein endlich erzeugter R -Modul. Seien $x_i, 1 \leq i \leq n$ Elemente von M , deren Bilder in $M/\mathfrak{m}M$ eine Basis des R/\mathfrak{m} -Vektorraums $M/\mathfrak{m}M$ bilden. Zeigen Sie, dass M von den x_i erzeugt wird.

Übung 4 Sei $R = \prod_{i=1}^n R_i$ das direkte Produkt der Ringe R_i . Zeigen Sie, dass $\text{Spec}(R)$ die disjunkte Vereinigung von offenen (und abgeschlossenen) Teilräume X_i ist, wobei X_i kanonisch homöomorph zu $\text{Spec}(R_i)$ ist.

Sei umgekehrt R ein beliebiger Ring. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. $X = \text{Spec}(A)$ ist unzusammenhängend.
2. $R \cong R_1 \times R_2$, wobei weder R_1 , noch R_2 der Nullring ist.
3. R enthält ein idempotentes Element $\neq 0, 1$.
Insbesondere ist das Spektrum eines lokalen Rings stets zusammenhängend.

Präsenzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 5

Sei R ein Ring. Zeigen Sie: zu R -Moduln $M_i, i \in I$ existiert ein R -Modul $\prod_{i \in I} M_i$ zusammen mit surjektiven Modulhomomorphismen $\pi_j : \prod_{i \in I} M_i \rightarrow M_j$ mit folgender universeller Eigenschaft:

zu jedem R -Modul T und R -Modulhomomorphismen $f_i : T \rightarrow M_i$ für alle $i \in I$ gibt es genau einen R -Modulhomomorphismus $f : T \rightarrow \prod_{i \in I} M_i$ mit $f_i = \pi_i \circ f$ für alle $i \in I$ (universelle Eigenschaft des Produkts von R -Moduln).

Übung 6

Sei M ein endlich erzeugter R -Modul, N ein Untermodul von M und I ein Ideal, das im Jacobson Radikal von R enthalten ist. Dann folgt aus $M = IM + N$, dass $M = N$.

Zusatzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 7

Sei R ein Ring. Zeigen Sie, dass das Jacobson Radikal von $R[x]$ das Nilradikal ist.

Übung 8

Sei R ein Ring, in dem für jedes Element $x^n = x$ für ein gewisses $n > 1$ (abhängig von x) gilt. Zeigen Sie, dass dann jedes Primideal von R maximal ist.

Dieses Blatt kann bis spätestens **12:00 Uhr am Montag, den 30.05.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Schnellhefter, zusammen zu halten.