

Übungen zur Vorlesung Kommutative Algebra
Übungsblatt 6

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya
Übungen: M. Nickel

15.05.2016

Übung 1 (4 Punkte)

Sei $0 \rightarrow V_1 \rightarrow \dots \rightarrow V_n \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von k -Vektorräumen. Zeigen Sie:

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i \dim_k V_i = 0.$$

Übung 2 (4 Punkte)

Sei A ein lokaler Ring, M und N seien endlich erzeugte A -Moduln. Zeigen Sie, dass aus $M \otimes N = 0$ folgt, dass $M = 0$ oder $N = 0$. Benutzen Sie Übung 6 und das Nakayama Lemma.

Übung 3 (4 Punkte)

Sei $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von A -Moduln mit M' und M'' endlich erzeugt. Zeigen Sie, dass dann M endlich erzeugt ist.

Übung 4 Sei A ein Ring $\neq 0$. Zeigen Sie, dass aus $A^n \cong A^m$ folgt, dass $m = n$. (Hinweis: sei \mathfrak{m} ein maximales Ideal von A und sei $\varphi : A^n \rightarrow A^m$ ein Isomorphismus. Man betrachte $1 \otimes \varphi : (A/\mathfrak{m}) \otimes A^n \rightarrow (A/\mathfrak{m}) \otimes A^m$.)

Zeigen Sie, dass aus $\varphi : A^n \rightarrow A^m$ surjektiv folgt, dass $n \geq m$. Gilt auch stets, dass aus $\varphi : A^n \rightarrow A^m$ injektiv folgt, dass $n \leq m$?

Präsenzaufgaben Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.

Übung 5

Zeigen Sie: $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$, falls m und n teilerfremd sind.

Übung 6

Sei A ein Ring, I ein Ideal, M ein A -Modul. Zeigen Sie, dass $(A/I) \otimes_A M$ zu M/IM isomorph ist. (Tensorieren Sie dazu die exakte Sequenz $0 \rightarrow I \rightarrow A \rightarrow A/I \rightarrow 0$ mit M .)

Zusatzaufgaben Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.

Übung 7

Sei $M_i, (i \in I)$ eine Familie von A -Moduln und sei M deren direkte Summe. Zeigen Sie, dass M genau dann ein flacher A -Modul ist, wenn alle M_i es sind.

Übung 8

Sei $A[x]$ der Polynomring über einem Ring A . Zeigen Sie mithilfe der vorangehenden Übung, dass $A[x]$ eine flache A -Algebra ist.

Übung 9

Sei \mathfrak{p} ein Primideal in einem Ring A . Zeigen Sie, dass $\mathfrak{p}[x]$ ein Primideal in $A[x]$ ist. Gilt dies auch für maximale Ideale?

Übung 10

Sei A ein Ring, I ein Ideal, das im Jacobson Radikal von A enthalten ist. Sei M ein A -Modul, N ein endlich erzeugter A -Modul und $u : M \rightarrow N$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie, dass u surjektiv ist, falls der induzierte Homomorphismus $M/IM \rightarrow N/IN$ surjektiv ist.

Dieses Blatt kann bis spätestens **12:00 Uhr am Montag, den 23.05.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Schnellhefter, zusammen zu halten.