Übungen zur Vorlesung Kommutative Algebra

Übungsblatt 3

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya 25.04.2016

Übungen: M. Nickel

Übung 1 (4 Punkte)
Seien $V \subset W \subset \mathbb{A}_k^n$ affine Varietäten. Zeigen Sie, dass jede irreduzible Komponente von V in einer irreduziblen Komponente von W enthalten ist.

Übung 2 (4 Punkte)
Sei R ein beliebiger Ring, $\{P_1, ..., P_r\}$ eine Menge von Primidealen. Zeigen Sie, dass $P_1 \cap \cdots \cap P_r$ genau dann prim ist, wenn ein $1 \leq i \leq r$ existiert, sodass P_i in allen anderen P_j's enthalten ist.

Übung 3 (4 Punkte)
Ein Ideal $I \lhd k[x_1, \ldots, x_n]$ heißt nulldimensional, falls

$$\dim_k k[x_1, \ldots, x_n]/I < \infty.$$

Zeigen Sie, dass ein Ideal I genau dann nulldimensional ist, wenn $V(I)$ eine endliche Menge ist. Zeigen Sie weiterhin, dass für $k = \mathbb{C}$ für jedes nulldimensionale Ideal $I \lhd \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I \leq \#V(I)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn I ein Radikalideal ist.

Übung 4 (4 Punkte)
(Spektrum eines Rings) Sei R ein Ring und sei $\operatorname{Spec} R$ die Menge der Primideale in R. Für eine beliebige Teilmenge $S \subset R$ definiert man

$$V(S) = \{P \in \operatorname{Spec} R \mid S \subset P\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $V(\{0\}) = \operatorname{Spec} R$ und $V(\{r\}) = \varnothing$, falls $r \in R^\times$.

(b) $V(S) = V((S)) = V(\sqrt{(S)})$ (wobei (S) das durch S erzeugte Ideal in R bezeichne).

(c) Für eine beliebige Kollektion $\{S_i \mid i \in I\}$ von Teilmengen von R gilt

$$V(\cup_{i \in I} S_i) = \cap_{i \in I} V(S_i).$$

(d) Falls $I, J \lhd R$, so gilt $V(IJ) = V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)$.

(e) Die Kollektion $\{V(S) \mid S \subset R\}$ bestimmt eine Topologie auf $\operatorname{Spec} R$, genannt *Zariski Topologie*.

(f) Beschreiben Sie die Zariski Topologie auf $\mathbb{Z}, \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$. Welche Punkte sind abgeschlossen?

Präsenzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 5
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

(a) Sei X ein topologischer Raum, $Y, Z \subset X$ irreduzible Unterräume. Dann ist $Y \cap Z$ irreduzibel.

(b) Die affine Varietät, die zu $\mathbb{C}[X,Y]/(XY)$ gehört, ist irreduzibel.

(c) Jede offene Teilmenge von $\mathbb{A}^2$ in der Zariski Topologie ist dicht.

(d) Die affine Varietät, die zu $\mathbb{C}[X,Y]/(XY-1)$ gehört, ist irreduzibel.

Übung 6
Sei R ein Ring, in dem für jedes Element $a \in R$ eine positive ganze Zahl $n_a > 2$ existiert, so dass $a^{n_a} = a$. Zeigen Sie, dass jedes Primideal in R maximal ist.

Zusatzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 7
Sei k ein beliebiger Körper, $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ und d eine positive ganze Zahl. f heißt homogen vom Grad d, falls für jedes $\lambda \in k$ gilt

$$f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_1, \ldots, x_n).$$

Zeigen Sie:

(a) Ein Polynom f ist homogen vom Grad d genau dann, wenn es eine k-Linearkombination von Monomen vom Grad d ist.

(b) Jedes Polynom f kann eindeutig als die Summe homogener Polynome geschrieben werden. Diese nennt man die homogenen Komponenten von f.

(c) (Satz von Euler) k habe Charakteristik 0. Dann ist ein Polynom $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ genau dann homogen vom Grad d, wenn

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \partial_{x_i} f = d \cdot f.$$

Übung 8
Seien $I, J, K \triangleleft R$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $(I : R) = R$.

(b) $IJ \subset K$ genau dann, wenn $I \subset (K : J)$.

(c) Sei $\{I_\alpha \mid \alpha \in A\}$ eine Menge von Idealen in R. Dann gilt
$$(I : \sum_{\alpha \in A} I_\alpha) = \cap_{\alpha \in A}(I : I_\alpha).$$

(d) $((I : J) : K) = (I : JK)$.

Übung 9
Zeigen Sie, dass jedes Primideal P eines Rings R Kern eines Homomorphismus $R \to K$ ist, wobei K ein Körper sei.

Übung 10
Sei X ein noetherscher topologischer Raum. Zeigen Sie:

(a) Ist $Y \subset X$ ein beliebiger Unterraum, so ist Y ebenfalls noethersch und $\dim Y \leq \dim X$.

(b) Sei $\{U_i \mid i \in I\}$ eine offene Überdeckung von X. Dann ist
$$\dim X = \sup_{i \in I} \dim U_i.$$

(c) Ist $U \subset X$ eine dichte offene Teilmenge, so gilt $\dim U = \dim X$.

(d) Sei X endlichdimensional und irreduzibel, $Y \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann folgt aus $\dim Y = \dim X$, dass $Y = X$.

Übung 11
Sei $I \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ ein nulldimensionales Ideal, $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Sei $\mu_f : \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I \to \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I$ die Multiplikation mit f.

(a) Zeigen Sie, dass μ_f linear ist und, dass $\mu_f = \mu_g$ als lineare Abbildungen genau dann, wenn $f - g \in I$.

(b) Beweisen Sie $\mu_{f+g} = \mu_f + \mu_g$ und $\mu_{fg} = \mu_f \cdot \mu_g$ für alle $g \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$.

(c) Zeigen Sie, dass $\mu_{h(f)} = h(\mu_f)$ für alle Polynome $h \in \mathbb{C}[t]$.

Übung 12
Geben Sie ein Beispiel von einem noetherschen topologischen Raum an, der unendlichdimensional ist.

Dieses Blatt kann bis spätestens **12:00 Uhr** am **Montag, den 02.05.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Schnellhefter, zusammen zu halten.