

Übungen zur Vorlesung Kommutative Algebra  
Übungsblatt 12

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya  
Übungen: M. Nickel

27.06.2016

---

**Übung 1** (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Länge  $l(M)$  eine additive Funktion auf der Klasse aller  $R$ -Moduln von endlicher Länge ist.

**Übung 2** (4 Punkte)

Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen für einen  $k$ -Vektorraum  $V$ :

- $V$  hat endliche Dimension,
- $V$  hat endliche Länge,
- $V$  erfüllt die aufsteigende Kettenbedingung,
- $V$  erfüllt die absteigende Kettenbedingung.

**Übung 3** (4 Punkte)

Sei  $R$  ein Ring, in dem das Nullideal ein Produkt  $\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n$  von (nicht notwendigerweise verschiedenen) maximalen Ideal ist. Zeigen Sie, dass dann  $R$  noethersch ist genau dann, wenn  $R$  artinsch ist.

**Übung 4** (4 Punkte)

Sei  $R$  ein noetherscher Ring und sei  $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in R[[X]]$ . Zeigen Sie, dass  $f$  nilpotent ist genau dann, wenn alle  $a_n$  nilpotent sind.

**Präsenzaufgaben** *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

**Übung 5**

Welche der folgenden Ringe sind noethersch (die Koeffizienten seien bei allen Ringen  $\mathbb{C}$ )?

1. Der Ring der rationalen Funktionen von  $z$ , die keine Pole auf dem Kreis  $|z| = 1$  haben.
2. Der Ring der Potenzreihen in  $z$  mit positivem Konvergenzradius.
3. Der Ring der Potenzreihen in  $z$  mit unendlichem Konvergenzradius.
4. Der Ring der Polynome in  $z$ , deren erste  $k$  Ableitungen bei  $z = 0$  verschwinden ( $k \in \mathbb{N}$  fest).

5. Der Ring der Polynome in  $z, w$ , deren partielle Ableitungen nach  $w$  bei  $z = 0$  verschwinden.

**Übung 6** Sei  $R$  ein noetherscher Ring und  $S$  eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von  $R$ . Man zeige:  $S^{-1}R$  ist noethersch.

Dieses Blatt kann bis spätestens **12:00 Uhr am Montag, den 04.07.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Schnellhefter, zusammen zu halten.