

Übungen zur Vorlesung Kommutative Algebra
Übungsblatt 1

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya
Übungen: M. Nickel

12.04.2016

Übung 1 (4 Punkte)

Sei $S = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{C}^\times\}$. Entscheiden Sie, ob $S \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ eine affine Varietät ist. Beantworten sie dieselbe Frage über dem Körper \mathbb{F}_{17} .

Übung 2 (4 Punkte)

Seien $V \subset \mathbb{A}_k^n$ und $W \subset \mathbb{A}_k^m$ affine Varietäten über dem Körper k . Wir definieren deren kartesisches Produkt als

$$V \times W = \{(a, b) \in \mathbb{A}_k^{n+m} \mid a \in V, b \in W\} \subset \mathbb{A}_k^{n+m}.$$

Zeigen Sie, dass $V \times W \subset \mathbb{A}_k^{n+m}$ eine affine Varietät ist.

Übung 3 (4 Punkte)

Sei k ein Körper, der *nicht* algebraisch abgeschlossen ist und sei $X = V(f_1, \dots, f_m) \subset \mathbb{A}_k^n$ eine affine Varietät, die durch endlich viele Gleichungen gegeben ist. Zeigen Sie, dass X die Nullstellenmenge eines einzigen Polynoms ist.

Übung 4 (4 Punkte)

Sei k ein unendlicher Körper und $C = \{(t, t^3, t^4) \mid t \in k\} \subset \mathbb{A}_k^3$. Zeigen Sie, dass C eine algebraische Varietät ist und bestimmen Sie deren Verschwindungsideal.

Präsenzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 5

Beschreiben Sie die Nullstellenmengen der folgenden Ideale:

- (a) $(xy, xz, yz) \subset k[x, y, z]$
- (b) das Ideal erzeugt durch alle quadratfreien Monome von Grad d in den Variablen x_1, \dots, x_n über einem Körper k , wobei $1 \leq d \leq n$.

Zusatzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 6

Sei $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ und sei d der größte x_i Grad von f für $0 \leq i \leq n$. Zeigen Sie, dass f genau dann das Nullpolynom ist, wenn $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ für alle $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$ mit $1 \leq a_i \leq d + 1$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Übung 7

Ist die Menge $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$ der Punkte mit ganzzahligen Koordinaten eine affine Varietät?

Übung 8

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

- (a) Beliebige Vereinigungen affiner Varietäten sind affine Varietäten.
- (b) Das Komplement einer affinen Varietät ist eine affine Varietät.
- (c) Die mengentheoretische Differenz zweier affiner Varietäten ist eine affine Varietät.

Übung 9

Seien $V, W \subset \mathbb{A}_k^n$ affine Varietäten. Zeigen Sie:

- (a) $V \subset W$ genau dann, wenn $I(V) \supset I(W)$
- (b) $V = W$ genau dann, wenn $I(V) = I(W)$.

Übung 10

Zeigen Sie, dass für alle Ideale I in R das Ideal \sqrt{I} ein Radikalideal ist.

Dieses Blatt kann bis spätestens **12:00 Uhr am Montag, den 18.04.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Schnellhefter, zusammen zu halten.