Übungen zur Vorlesung Grundlagen der Algebra

Übungsblatt 5

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya 03.06.2014

Übungen: M. Nickel

Übung 1 (4 Punkte)
Entscheiden Sie (mit Begründung), ob die folgenden Gruppen zyklisch sind:
(a) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$
(b) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

Übung 2 (4 Punkte)
Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $|G| = 2n$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:
(a) Es existiert ein $g \in G$ mit $g \neq e$ und $g^2 = e$.
(Man betrachte hierfür die Bahnenformel für die Abbildung $g \mapsto g^{-1}$, die man als Operation von der Gruppe $\{\pm 1\}$ auf G interpretiert)
(b) Für alle $g \in G$ gibt es ein $h \neq g^{-1}$ mit $hgh = g^{-1}$.

Übung 3 (4 Punkte)
Sei $G \neq \{e\}$ eine Gruppe. Man zeige, dass die Abbildung $\mathbb{Z} \times G \to G$, die durch $(n, g) \mapsto g^n$ für $n \in \mathbb{Z}, g \in G$ definiert ist, keine Gruppenoperation ist.

Übung 4 (4 Punkte)
Sei $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper mit q Elementen.
(a) Zeigen Sie, dass ein $\mathbb{F}$-Vektorraum der Dimension d aus q^d Elementen besteht.
(b) Bestimmen Sie die Ordnung von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$.
(c) Bestimmen Sie die Ordnung von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ für $n \geq 1$.
(Tipp: $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ operiert auf $\mathbb{F}^2$ und man benutze die Bahnformel. Dies verallgemeinert man dann mit vollständiger Induktion)

Übung 5 (keine Punkte)
Diese Aufgabe ist zur eigenen Übung gedacht und wird nicht abgegeben oder korrigiert
Bestimmen Sie die positive ganzen Zahlen, die als Ordnung eines Elements in S_8 auftreten können.

Dieses Blatt kann bis spätestens **12:00 Uhr** am **Mittwoch, den 17.6.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Schnellhefter, zusammen zu halten.