Übungen zur Vorlesung Grundlagen der Algebra

Übungsblatt 4

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya
Übungen: M. Nickel

20.05.2014

Übung 1 (4 Punkte)
Die Gruppe $\mathbb{R}^\times$ operiert auf $\mathbb{R}^2$ vermöge

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (t,(x,y)) &\mapsto (tx, \frac{y}{t})\,. \end{aligned}$$

Geben Sie die Bahnen und Stabilisatoren bezüglich dieser Gruppenoperation an.

Übung 2 (4 Punkte)
Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe mit der Eigenschaft, dass G/H gerade 2 Elemente besitzt. Zeigen Sie, dass dann H ein Normalteiler ist.

Übung 3 (4 Punkte)
Sei K ein Körper. Man definiert $\mathbb{P}^n(K)$ als die Menge aller Geraden $L = K \cdot v = \{\lambda v \mid \lambda \in K\} \subset K^{n+1}$ mit $0 \neq v \in K^{n+1}$. Für eine Matrix $A \in \mathrm{GL}_{n+1}(K)$ ist $AL = \{Aw | w \in L\}$ wieder eine Gerade. Man zeige nun, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_{n+1}(K) \times \mathbb{P}^n(K) &\to \mathbb{P}^n(K) \\ (A, L) &\mapsto AL \end{aligned}$$

eine Gruppenoperation von $\mathrm{GL}_{n+1}(K)$ auf $\mathbb{P}^n(K)$ definiert und gebe die Bahnen bezüglich dieser Gruppenoperation an.

Übung 4 (1+3 Punkte)
Sei G eine Gruppe. Das Zentrum von G ist definiert als

$$Z(G) = \{z \in G \mid zg = gz \text{ für alle } g \in G\}\,.$$

(a) Zeigen Sie: $Z(G)$ ist ein Normalteiler in G.
(b) Berechnen Sie $Z(\mathrm{GL}_n(K))$ für einen Körper K.

Dieses Blatt kann bis spätestens **12:00 Uhr** am **Mittwoch, den 3.6.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Schnellhefter, zusammen zu halten.