Übungen zur Vorlesung Algebra I

Übungsblatt 7

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya — 30.11.2015

Übungen: M. Nickel

Übung 1 (4 Punkte)
Sei R ein Ring und $\mathfrak{m} \subsetneq R$ ein Ideal. R heißt lokal genau dann, wenn R genau ein maximales Ideal besitzt. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen

- R ist ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$
- jedes Element von $R \setminus \mathfrak{m}$ ist eine Einheit in R
- $\mathfrak{m}$ ist ein maximales Ideal und jedes Element vom Typ $1+m$ mit $m \in \mathfrak{m}$ ist eine Einheit in R.

Übung 2 (4 Punkte)
Sei R_S die Lokalisierung eines Rings R an einer multiplikativ abgeschlossenen Teilmenge $S \subset R$. Man zeige

(a) ein Ideal $\mathfrak{a} \subset R$ wird zu einem echten Ideal $\mathfrak{a}R_S \subsetneq R_S$ genau dann, wenn $S \cap \mathfrak{a} = \varnothing$

(b) für jedes Ideal $\mathfrak{b} \subset R_S$ gilt $(\mathfrak{b} \cap R)R_S = \mathfrak{b}$

(c) ist $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal mit $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$, so ist $\mathfrak{p}R_S$ ein Primideal mit $\mathfrak{p}R_S \cap R = \mathfrak{p}$

(d) für jedes Primideal $\mathfrak{q} \subset R_S$ gilt: $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap R$ ist ein Primideal in R mit $\mathfrak{p}R_S = \mathfrak{q}$. Insbesondere ist $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$.

Übung 3 (4 Punkte)

(a) Sei R ein Ring, $S \subset R$ multiplikativ abgeschlossen und $i : R \to R_S, a \mapsto \frac{a}{1}$ die kanonische Abbildung. Mit $\operatorname{Spec} R$ werde die Menge der Primideal in R bezeichnet. Zeigen Sie, dass i eine Bijektion

$$\operatorname{Spec} R_S \leftrightarrow \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \mathfrak{p} \cap S = \varnothing\}, \mathfrak{q} \mapsto \mathfrak{q} \cap R$$

induziert.

(b) Zeigen Sie: Ist R ein Ring und $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal, so gilt $R_\mathfrak{p} := R_{R \setminus \mathfrak{p}}$ (siehe Übung 6) ist ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$.

Übung 4 (4 Punkte)
Sei R ein Ring und $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal. Man zeige, dass es einen kanonischen Isomorphismus $Q(R/\mathfrak{p}) \xrightarrow{\sim} R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ gibt, wobei $Q(R/\mathfrak{p})$ den Quotientenkörper von $R/\mathfrak{p}$ bezeichne.

Präsenzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 5
Sei R ein Ring, $S \subset R$ multiplikativ abgeschlossen und $i : R \to R_S, a \mapsto \frac{a}{1}$ die kanonische Abbildung. Man zeige

(a) $\ker i = \{a \in R \mid as = 0 \text{ für ein } s \in S\}$

(b) $i(s) = \frac{s}{1}$ ist eine Einheit in R_S für alle $s \in S$

(c) $R_S \neq 0 \Leftrightarrow 0 \notin S$

(d) i ist bijektiv, falls S aus Einheiten in R besteht.

Übung 6
Sei R ein Ring und $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal. Zeigen Sie, dass $R \setminus \mathfrak{p}$ multiplikativ abgeschlossen ist. Man nennt $R_{R\setminus\mathfrak{p}}$ die Lokalisierung von R in $\mathfrak{p}$ und schreibt dafür oft $R_\mathfrak{p}$.

Übung 7
Sei R ein Ring und $f \in R$. Man zeige, dass $S = \{1, f, f^2, f^3, \dots\}$ multiplikativ abgeschlossen ist. In diesem Fall schreibt man oft R_f statt R_S.

Zusatzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 8
Zeigen Sie: $X^3+X+1 \in \mathbb{F}_2[X]$ und $X^2+1 \in \mathbb{F}_3[X]$ sind irreduzibel und $\mathbb{F}_2[X]/(X^3+X+1) \cong \mathbb{F}_8, \mathbb{F}_3[X]/(X^2+1) \cong \mathbb{F}_9$. Berechnen Sie die Inversen zu $X^2+1 \in \mathbb{F}_8$ und $X+2 \in \mathbb{F}_9$.

Übung 9
Zeigen Sie, dass es genau eine Derivation ∂_j von $K[x_1, \dots, x_n]$ gibt mit $\partial_j x_j := \delta_{ij}$.

Übung 10
Sei R ein Ring, $f, g \in R$ und seien $d, e \in \mathbb{N}$ mit $d \geq 1$. Zeigen Sie, dass dann ein kanonisches kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d] & R_f \arrow[d] \\ R_{fg} \arrow[r, "\cong"] & (R_f)_{f^{-e}g^d} \end{tikzcd}$$

existiert, wobei die untere horizontale Abbildung ein Isomorphismus ist.

Dieses Blatt kann bis spätestens **12:00 Uhr** am **Montag, den 7.11.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Schnellhefter, zusammen zu halten.