Übungen zur Vorlesung Algebra I

Übungsblatt 1

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya 13.10.2014
Übungen: M. Nickel

Übung 1 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass in einem Hauptidealring jedes Primideal maximal ist.

Präsenzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 2
Sei R ein Ring und $I \subset R$ ein Ideal. Zeigen Sie: ist I maximal, so ist es auch prim.

Übung 3
Sei R ein Ring und $a \in R$. Zeigen Sie: das Ideal $I = (a)$ ist prim $\Leftrightarrow$ a ist prim.

Übung 4
Sei R ein Ring und $I \subset R$ ein Ideal. Zeigen Sie die folgende Äquivalenz

$$R/I \text{ ist ein Integritätsbereich } \Leftrightarrow I \text{ ist ein Primideal}.$$

Übung 5
Geben Sie die Definition von maximalen Idealen und Primidealen an und finden Sie Beispiele für $\mathbb{Z}$, $K[X]$, wobei K ein Körper sei, $\mathbb{Z}[X]$. Beweisen Sie, dass $(2) \subset \mathbb{Z}[X]$ ein Primideal aber kein maximales Ideal ist.

Übung 6
Sei $f : R \twoheadrightarrow S$ ein surjektiver Ringhomomorphismus. Zeigen Sie, dass f eine Bijektion

$$\{\text{Ideale in } S\} \xrightarrow{f^{-1}} \{\text{Ideale in } R, \text{ die } \mathrm{Ker}(f) \text{ enthalten}\}$$

induziert.

Übung 7
Zeigen Sie: der Ring R ist ein Körper $\Leftrightarrow$ $1 \neq 0$ und R enthält keine Ideale außer (0) und R.

Übung 8
Sei R ein Ring und I ein Ideal in R. Man zeige, dass I genau dann maximal ist, wenn R/I ein Körper ist.

Übung 9
Sei $f : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Finden Sie ein Beispiel dafür, dass das Urbild eines maximalen Ideals in S nicht immer ein maximales Ideal in R ist.

Übung 10
Sei R ein Ring und $I \neq R$ ein Ideal in R. Zeigen Sie, dass I stets in einem maximalen Ideal enthalten ist (Zornsches Lemma).

Dieses Blatt kann bis spätestens **12:00 Uhr** am **Montag, den 26.10.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Schnellhefter, zusammen zu halten.