

Geometrie für Lehramtskandidaten (L2/L5)
SS 2008

Jürgen Wolfart

Skript: Cristina Sarti Bilder: Claudia Baden

20. September 2012

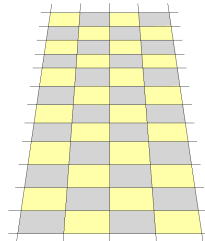
Kapitel 1

Etwas darstellende Geometrie

Die Aufgabe der darstellenden Geometrie ist die Darstellung räumlicher Figuren in einer oder mehreren Zeichenebenen. Sehr anschauliche Bilder liefert die Zentralprojektion (vgl. Abbildung 1.1) (siehe Kapitel "Projektive Geometrie").

Ihr Nachteil ist, dass die entstehenden Bilder wenig maßstabgetreu sind.

Abbildung 1.1: Fliesenboden in Zentralprojektion



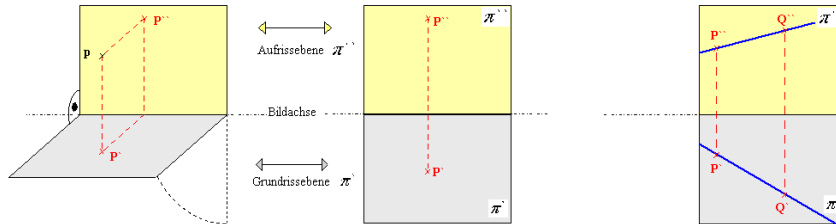
Weniger anschaulich, aber besser für alle Zwecke des Messens geeignet ist die Parallelprojektion. Am besten wird die Parallelprojektion auf zwei (oder drei) senkrecht aufeinanderstehende Ebenen (**Grundriss** π' und **Aufriss** π'' , vgl. Abbildung 1.2) durchgeführt. Aus den Projektionen lassen sich (fast) alle geometrischen Eigenschaften rekonstruieren.

Jeder Punkt P des \mathbb{R}^3 ist durch seine Projektionsbilder P' , P'' in π' und π'' eindeutig bestimmt. In der **Zweitafelprojektion** ist die Verbindungsstrecke $P'P''$ **senkrecht** zur Bildachse, d.h. dem Schnitt von π' und π'' (vgl. Abbildung 1.2).

Darstellung einer Geraden: Die Verbindungsgerade zweier Punkte P und Q ist fast immer durch die Bilder von P und Q eindeutig bestimmt (vgl. Abbildung 1.2).

Eine Ausnahme bilden jene Geraden, die senkrecht zur Bildachse verlaufen. In diesem Fall sind die Projektionen anders zu wählen.

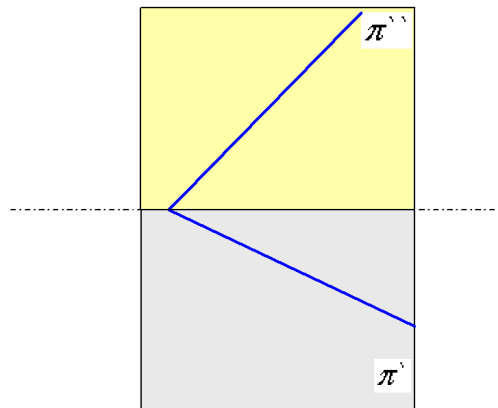
Abbildung 1.2:



Darstellung einer Ebene: Eine Ebene im Raum wird durch ihre Schnittgeraden mit π' und π'' dargestellt. Diese werden in der anderen Ebene jeweils durch die Achse beschrieben (vgl. Abbildung 1.3)

Grundaufgaben im Umgang mit Grund- und Aufriss :

Abbildung 1.3:



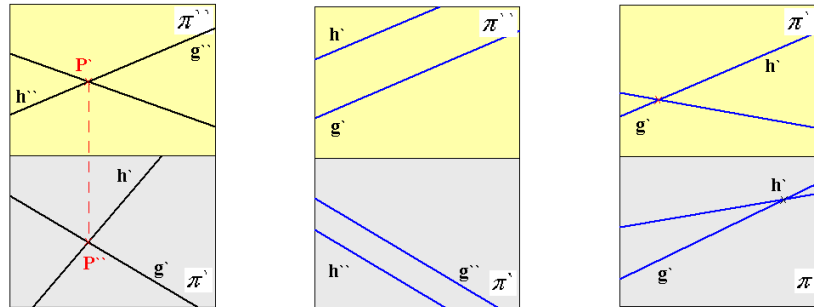
(i) **Gegenseitige Lage zweier räumlicher Geraden g und h bestimmen:**

Es gibt genau 3 Möglichkeiten: g und h schneiden sich oder sie sind parallel oder sie sind **windschief** (d.h. sie schneiden sich nicht, sind aber auch nicht parallel). Im allgemeinen ist an Grund- und Aufriss ablesbar, welche dieser Möglichkeiten eintritt, wenn wir **annehmen**, dass g', g'', h', h'' nicht senkrecht zur Bildachse sind. Dann gilt (vgl. Abbildung 1.4):

- g, h parallel $\iff g', h'$ parallel und g'', h'' parallel

- g, h schneiden sich $\iff g', h'$ schneiden, g'', h'' schneiden sich und die Verbindungsstrecke der Schnittpunkte liegt **senkrecht zur Bildachse**.
- In allen anderen Fällen sind g, h windschief.

Abbildung 1.4:

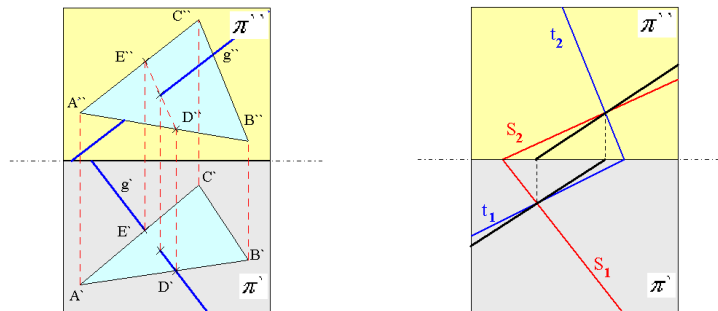


(ii) **Schnittpunkt einer Geraden g mit einer Ebene bestimmen.**

Die Ebene sei durch ein Dreieck ABC gegeben. Betrachte jetzt die Hilfsebene e , in der g auf π' projiziert wird. Diese schneidet die Gerade AC in E und AB in D (vgl. Abbildung 1.5).

Die Verbindungsstrecke \overline{ED} liegt im Dreieck und schneidet g im Durchstoßpunkt.

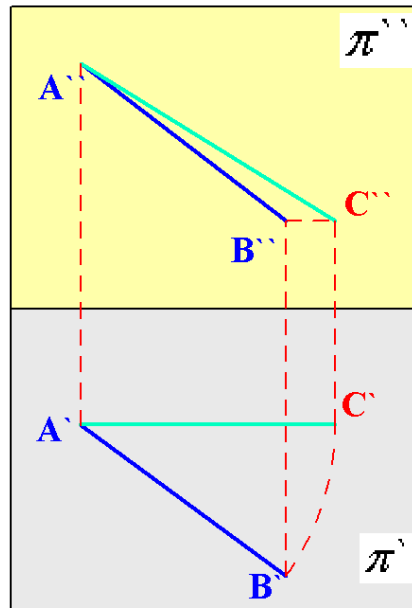
Abbildung 1.5:



- (iii) **Schnittpunkt von zwei Ebenen bestimmen.** Beide Ebenen sind gegeben durch ihre Schnittgeraden s_1, s_2 bzw. t_1, t_2 mit π' und π'' (vgl. Abbildung 1.5).
 Idee: Die Schnittgerade der Ebenen ist durch die beiden Schnittpunkte von $s_1 \cap t_1 (\in$

π') und $s_2 \cap t_2 (\in \pi'')$ gegeben. Diese brauchen einfach nur verbunden zu werden.
 Variante: Bei der Durchdringung zweier Dreiecke wende man Verfahren 2) auf die Randstrecken an!

Abbildung 1.6:



(iv) **Wahre Größe einer ebenen Figur bestimmen.**

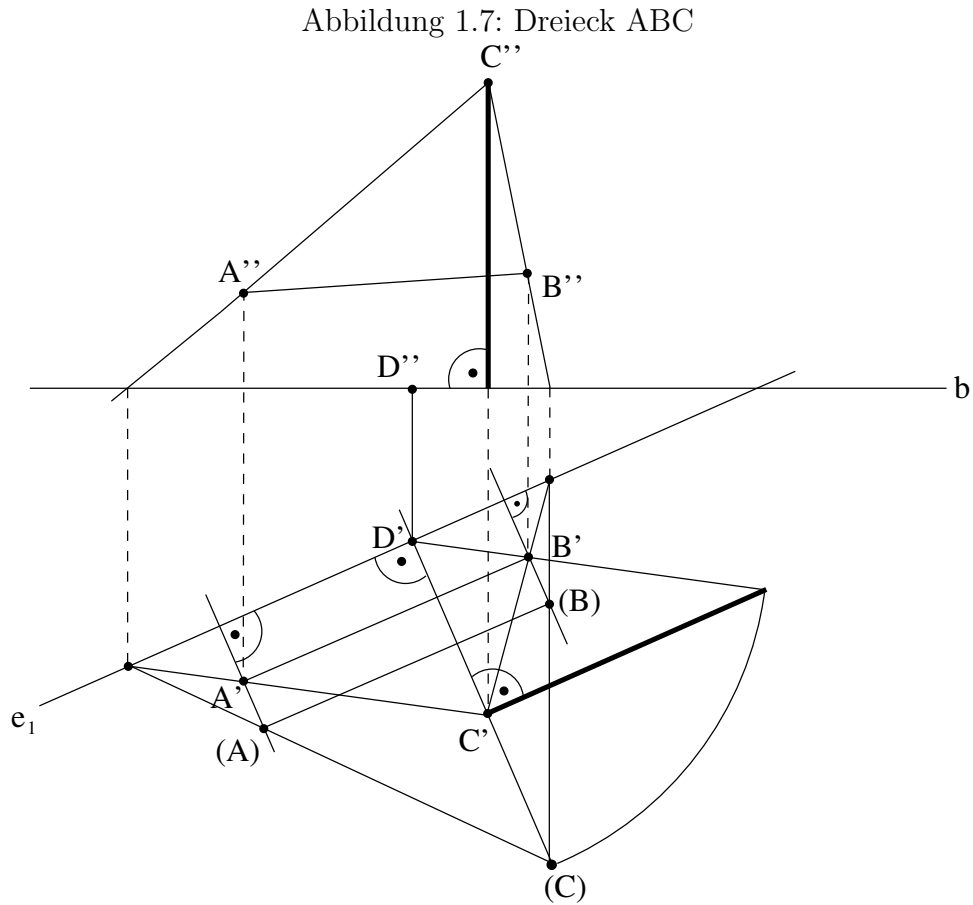
Idee: Figur in eine zu π' oder π'' parallele Ebene drehen \rightarrow Grund- bzw. Aufriss der gedrehten Figur zeigt die Figur in ihrer wahren Größe.

Zunächst für eine einzelne Strecke AB : Die Strecke wird um eine Achse durch A gedreht, welche senkrecht auf π' steht. Sie wird gedreht, bis sie mit der Strecke \overline{AC} übereinstimmt, die parallel zu π'' liegt (vgl. Abbildung 1.6).

Nun gilt für die Streckenlängen $|\overline{AC}| = |\overline{AC''}| = |\overline{AB}|$ („Monge-Drehung“).

Bei einem Dreieck wird es komplizierter (vgl. Abbildung 1.7): Konstruiere zunächst die Schnittgerade $e_1 = e'_1$ der Dreiecksebene mit π' . Diese ist unsere Drehachse. Wir drehen das Dreieck in π' . Als erstes bestimmt man den Punkt D . Dieser ist gegeben durch den Punkt auf e_1 , durch den das Lot auf e_1 durch C' verläuft. Nun konstruieren wir den Bildpunkt (C) von C' . Dieser liegt auf der Senkrechten zu e_1 durch C' , so dass der Abstand von (C) zu e_1 gleich dem Abstand von C' zu e_1 ist. Dazu muss die wahre Länge von CD wie oben bestimmt werden. Ähnlich geht man

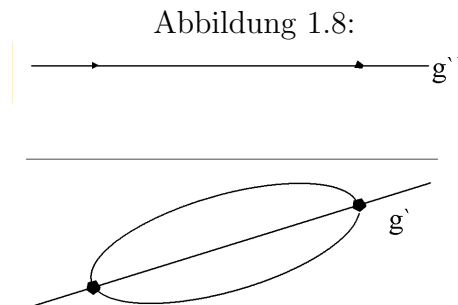
jetzt bei (A) und (B) vor. Man sieht in π' das Dreieck dann in seiner wahren Größe.



Allgemeine Eigenschaften des Zweitafelnsystems

- Parallele Geraden sind auch in Grund- und Aufriss parallel.
- Ebene Figuren erscheinen im Grundriss nur in ihrer wahren Größe, wenn sie parallel zu π' sind (gilt auch für Strecken).
- Ebene Figuren erscheinen im Aufriss nur in ihrer wahren Größe, wenn sie parallel zu π'' sind (gilt auch für Strecken).
- Andere Strecken sind im Grund- und Aufriss gekürzt, parallele Strecken sind im gleichen Verhältnis.

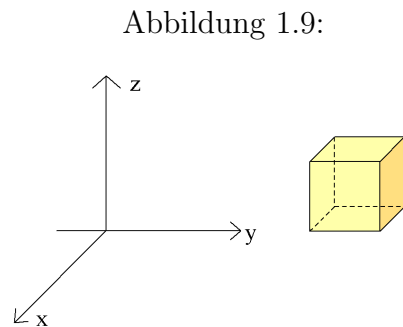
- Auf einer Ebene im Raum liegende Kreise werden in der Projektion zu Ellipsen, wobei die große Halbachse in π' Bild eines Kreisdurchmessers ist, der parallel zu π' liegt (vgl. Abbildung 1.8).



Andere Projektionsmöglichkeiten ("Eintafel-Projektion") :]

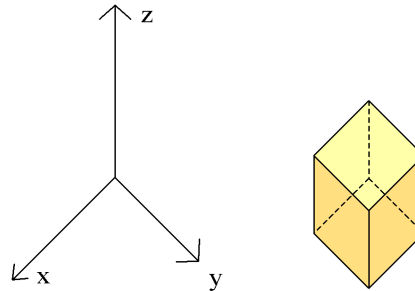
Schräge Parallelprojektion: (Lineare) Projektion auf **eine** Zeichenebene entlang paralleler Strecken. Die Projektion ist nicht notwendig senkrecht. Insbesondere gibt es hier die

Kavalierprojektion: Parallelprojektion auf π'' , so dass im Bild die x-Achse nach links unten in einem 45° -Winkel verläuft und die x-Achse um den Faktor $\frac{1}{2}$ verkürzt wird. (vgl. Abbildung 1.9).



Militärprojektion: Parallelprojektion auf π' (um 45° gedreht), so dass das Bild der z-Achse senkrecht nach oben verläuft und die z-Achse **nicht** verkürzt ist. Alle drei Achsen werden nicht (oder im gleichen Maßstab) verkürzt (vgl. Abbildung 1.10).

Abbildung 1.10:



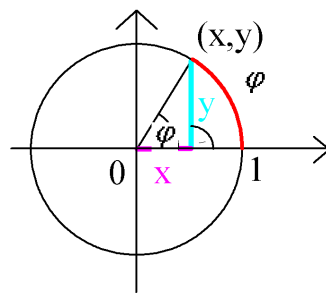
Kapitel 2

Trigonometrie: Kurzfassung

Wir wiederholen zunächst wichtige Eigenschaften von trigonometrischen Funktionen.

Sei φ ein Winkel im Bogenmaß. Betrachte den Punkt (x, y) auf dem Einheitskreis, so dass die Strecke von 0 nach (x, y) den Winkel φ zur positiven x-Achse einschließt (vgl. Abbildung 2.1).

Abbildung 2.1:

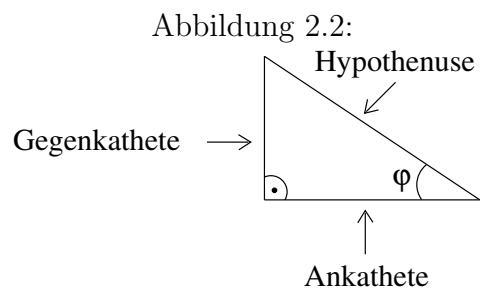


Dann ist $\cos \varphi = x$ und $\sin \varphi = y$. Punkte auf dem Einheitskreis erfüllen $x^2 + y^2 = 1$. Es gilt folglich $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$. Für spitze Winkel φ ist auch die Definition

$$\cos \varphi = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$$

$$\sin \varphi = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$$

brauchbar (vgl. Abbildung 2.2).

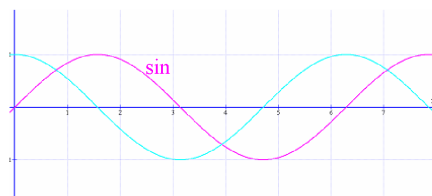


φ misst dabei den Winkel, zweckmäßigerweise im Bogenmaß (vgl. Abbildung 2.3), denn nur im Fall des Bogenmaßes erhält man bequeme Formeln zum Differenzieren der Funktionen:

$$\begin{aligned}\cos' \varphi &= -\sin \varphi, \\ \sin' \varphi &= \cos \varphi, \\ \cos'' \varphi &= -\cos \varphi, \\ \sin'' \varphi &= -\sin \varphi.\end{aligned}$$

Das ist wichtig für die Schwingungsdifferentialgleichung $f'' + f = 0$ der Physik.

Abbildung 2.3:



Wichtige Werte:

$$\begin{aligned}\sin 0 &= 0 & \cos \frac{\pi}{6} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \frac{\pi}{6} &= \frac{1}{2} & \cos \frac{\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \frac{\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos \frac{\pi}{3} &= \frac{1}{2} \\ \sin \frac{\pi}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{2} & & \\ \sin \frac{\pi}{2} &= 1 & & \end{aligned}$$

Weitere Werte können durch Symmetrieeigenschaften abgeleitet werden, z.B. $\sin \varphi = \cos(\varphi - \frac{\pi}{2})$, $\sin(\varphi) = -\sin \varphi$, $\cos \varphi = \cos(-\varphi)$.

Andere trigonometrische Funktionen (vgl. Abbildung 2.4):

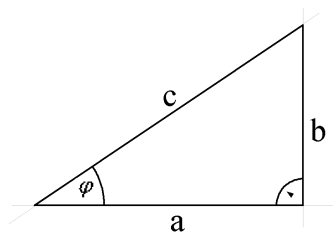
$$\tan \varphi = \frac{b}{a} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}},$$

$$\cot \varphi = \frac{a}{b} = \frac{1}{\tan \varphi} = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi},$$

dabei ist $\tan \varphi$ definiert für $\varphi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
und $\cot \varphi$ ist definiert für $\varphi \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Die Trigonometrie ist der Anfang der „rechnenden Geometrie“.

Abbildung 2.4:



Satz 1. Im Dreieck mit Strecken der Längen a, b, c und gegenüberliegenden Winkeln α, β, γ gelten

(i) der **Cosinussatz**: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$;

(ii) der **Sinusatz**: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$.

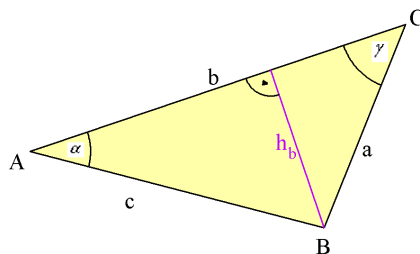
Beweis.

- (i) ist für $\gamma = \frac{\pi}{2}$ gerade der Satz des Pythagoras. Für $\gamma < \frac{\pi}{2}$ unterteile das Dreieck durch die Höhe auf b der Länge $h_b = a \sin \gamma$ (vgl. Abbildung 2.5) und wende den Satz von Pythagoras an:

$$c^2 = (b - a \cos \gamma)^2 + (a \sin \gamma)^2 = b^2 - 2ab \cos \gamma + a^2(\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma).$$

Ähnlicher Beweis für $\gamma > \frac{\pi}{2}$.

Abbildung 2.5:



$$(ii) h_b = a \sin \gamma = c \sin \alpha \implies \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \text{ etc..}$$

Folgerungen:

(i) Umkehrung des Satzes von Pythagoras.

$$c^2 = a^2 + b^2 \implies \gamma = \frac{\pi}{2}$$

$$(\text{denn: } c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \implies \cos \gamma = 0 \implies \gamma = \frac{\pi}{2})$$

(ii) Berechnungsmöglichkeiten für konstruktive Probleme der Geometrie, z.B.: Gibt es Dreiecke mit vorgegebenen Größen α, c, a ? Wenn ja, wieviele?

Aus Satz 1 erhalten wir eine quadratische Gleichung für b mit Lösungen

$$\begin{aligned} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha &\Leftrightarrow b = c \cos \alpha \pm \sqrt{(c \cos \alpha)^2 - c^2 + a^2} \\ &\Leftrightarrow b = c \cos \alpha \pm \sqrt{a^2 - c^2 \sin^2 \alpha}, \end{aligned}$$

also:

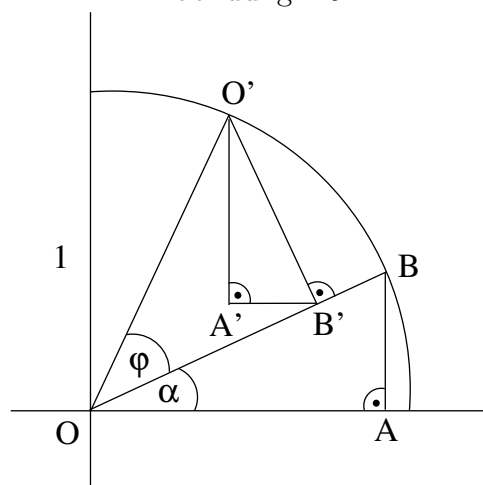
- keine Lösung für $a < c \sin \alpha$,
- genau eine Lösung für $a = c \sin \alpha$ ($\Leftrightarrow \gamma = \frac{\pi}{2}$),
- zwei Lösungen für $a > c \sin \alpha$; dabei ist die eine der beiden irrelevant, wenn

$$\begin{aligned} a^2 - c^2 \sin^2 \alpha > c^2 \cos^2 \alpha &\Leftrightarrow a^2 > c^2 \\ &\Leftrightarrow \alpha \text{ liegt der größeren Seite gegenüber.} \end{aligned}$$

Satz 2. (Additionstheoreme) Für alle Winkel α, φ gilt

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \varphi) &= \cos \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \sin \varphi \\ \sin(\alpha + \varphi) &= \sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi. \end{aligned}$$

Abbildung 2.6:



Beweis. Beweis durch die Winkeladdition am Einheitskreis (vgl. Abbildung 2.6):

Das Dreieck $\triangle OAB$ hat eine Hypotenuse der Länge 1 und Kanten der Längen $\cos \alpha$ und $\sin \alpha$, d.h. $B = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ und A ist die senkrechte Projektion von B auf der x-Achse.

Das Dreieck $\triangle O'A'B'$ entsteht daraus durch Drehung um $\frac{\pi}{2}$ und Streckung um den Faktor $\sin \varphi$, d.h. $O' = (\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta))$ und B' ist O' senkrecht auf OB projiziert und A' ist der Punkt mit gleicher y-Koordinate wie B' und gleicher x-Koordinate wie O' .

Idee: Die Dreiecke OAB und $O'A'B'$ haben die gleichen Winkel. Darum sind sie ähnlich, d.h. $O'A'B'$ ist OAB gedreht und um einen Faktor t skaliert, wobei

$$t = \frac{|O'A'|}{|OA|} = \frac{|O'B'|}{|OB|} = \frac{|A'B'|}{|AB|}$$

Wir wissen:

$$\left. \begin{array}{l} |OA| = \cos \alpha \\ |AB| = \sin \alpha \\ |OB| = 1 \\ |O'B'| = \sin \varphi \end{array} \right\} \implies t = \sin \varphi$$

Setzen wir nun ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} |A'B'| &= t |AB| = \sin \alpha \sin \varphi \\ |O'A'| &= t |OA| = \cos \alpha \sin \varphi. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$O' = B' + (-\sin \alpha \sin \varphi, \cos \alpha \sin \varphi).$$

Andererseits ist

$$B' = \frac{|OB'|}{|OB|} \cdot B = \frac{\cos \varphi}{1} B = (\cos \varphi \cos \alpha, \cos \varphi \sin \alpha).$$

So erhalten wir:

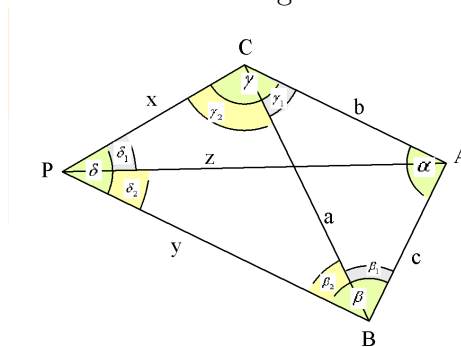
$$O' = (\cos \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \sin \varphi, \sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi).$$

Setzen wir die Koordinaten von O' ein, so folgt die Behauptung.

Anwendung: Grund-Techniken der **Landvermessung**:

- **Vorwärtsschneiden:** b, c, α seien gemessen (vgl. dazu Abbildung 2.7); durch Winkelmessung von β und γ aus sollen alle anderen Längen und Winkel, die

Abbildung 2.7:



in Abbildung 2.7 angedeutet sind, bestimmt werden:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} \sin \beta_1 &= \frac{b}{a} \sin \alpha, & \sin \gamma_1 &= \frac{c}{a} \sin \alpha, \\ \beta_2 &= \beta - \beta_1, & \gamma_2 &= \gamma - \gamma_1, & \delta &= \pi - \gamma_2 - \beta_2, \\ x &= a \frac{\sin \beta_2}{\sin \delta}, & y &= a \frac{\sin \gamma_2}{\sin \delta}, \end{aligned}$$

$$z = \sqrt{b^2 + x^2 - 2bx \cos \gamma} = \sqrt{c^2 + y^2 - 2cy \cos \beta}.$$

- **Rückwärtsschneiden:** Nun seien b, c, α und die Winkel von P aus gemessen. a, β_1, γ_1 lassen sich wie oben berechnen.

$$\frac{z}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \delta_2}, \quad \frac{z}{b} = \frac{\sin \gamma}{\sin \delta_1} \Rightarrow \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{b \sin \delta_2}{c \sin \delta_1}$$

und

$$\begin{aligned} \beta + \gamma = 2\pi - (\alpha + \delta) =: \varphi &\Rightarrow \frac{\sin \beta}{\sin(\varphi - \beta)} = \frac{b \sin \delta_2}{c \sin \delta_1} \\ &\Rightarrow \frac{\sin \beta}{\sin \varphi \cos \beta - \cos \varphi \sin \beta} = \frac{b \sin \delta_2}{c \sin \delta_1} \\ &\Rightarrow \sin \beta (c \sin \delta_1 + b \sin \delta_2 \cos \varphi) = b \sin \varphi \cos \beta \sin \delta_2 \\ &\Rightarrow \beta \text{ wird berechnet durch } \tan \beta = \frac{b \sin \varphi \sin \delta_2}{c \sin \delta_1 + b \sin \delta_2 \cos \varphi} \end{aligned}$$

Entsprechend verläuft die Berechnung von $\gamma = \varphi - \beta$, und daraus ergeben sich x, y, z nach

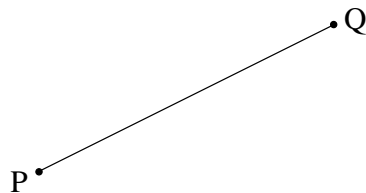
$$z = c \frac{\sin \beta}{\sin \delta_2}, \quad y = c \frac{\sin(\pi - \delta_2 - \beta)}{\sin \delta_2}, \quad x = b \frac{\sin(\pi - \delta_1 - \gamma)}{\sin \delta_1}.$$

Kapitel 3

Sphärische Geometrie

Bisher haben wir die Geometrie in der Euklidischen Ebene und im Euklidischen Raum studiert. Hier sind die kürzesten Verbindungen zwischen zwei Punkten **gerade** Strecken (vgl. Abbildung 3.1).

Abbildung 3.1:



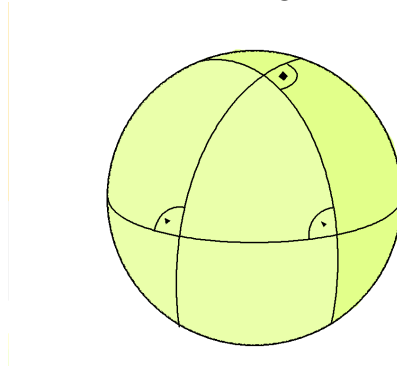
In diesem Kapitel wollen wir die Geometrie auf der Kugeloberfläche betrachten.

Satz 3. *Kürzeste Verbindungslinien auf der Kugeloberfläche sind **Großkreise** (vgl. Abbildung 3.2), d.h. Schnitte der Kugeloberfläche mit Ebenen durch den Kugelmittelpunkt.*

Bemerkungen zur Geometrie auf der Kugeloberfläche (**Sphäre**):

- (i) Beweis von Satz 3 durch lokale Approximation der Oberfläche durch ihre Tangentialebenen: dort sind Strecken die kürzesten Verbindungslinien.
- (ii) Die Großkreise werden also **sphärische Geraden**.
- (iii) Zwei nicht entgegengesetzte Punkte P, Q auf der Kugel besitzen eine kürzeste Verbindungslinie: P, Q und der Sphärenmittelpunkt M definieren eine Ebene, deren Schnitt mit der Kugel ein Großkreis ist. Die kürzeste Verbindung von P und Q liegt auf diesem Großkreis (der kürzere der beiden Kreisbögen). Bezeichnung: \widehat{PQ}

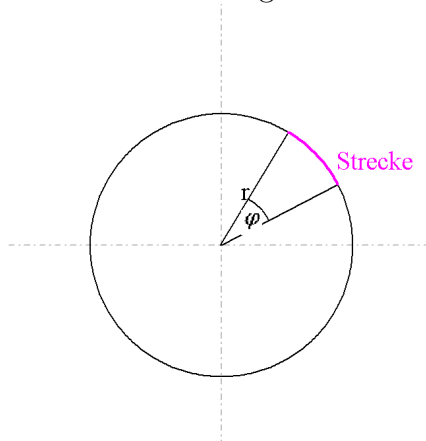
Abbildung 3.2:



- (iv) Zwei entgegengesetzte Punkte P, Q (Antipoden) besitzen unendlich viele kürzeste Verbindungen, weil M, P, Q auf einer Geraden liegen und somit unendlich viele Ebenen durch M, P, Q gehen.
- (v) Es gibt keine parallelen Geraden: je zwei verschiedene Geraden haben zwei (entgegengesetzte) Schnittpunkte.
- (vi) Winkel zwischen Geraden = Winkel zwischen deren Tangenten am Schnittpunkt = Winkel zwischen jenen Ebenen durch den Kugelmittelpunkt, welche die Geraden enthalten.
- (vii) Längen sphärischer Strecken (vgl. Abbildung 3.3): Normiere den Kugelradius auf 1. Die Länge ist dann definiert als der Winkel φ auf dem verbindenden Großkreis. Wir schreiben $|\widehat{PQ}| = \varphi$. Die Länge auf der realen Kugel erhält man durch Multiplikation mit dem Radius r , wenn φ im Bogenmaß gemessen wird, und sonst durch Multiplikation mit $\frac{2\pi}{360} \cdot r$.
- (viii) Zu jedem Großkreis gehören zwei **Pole**: Schnittpunkte der Achse durch den Kugelmittelpunkt, die auf der Großkreisebene senkrecht steht. Umgekehrt gehört zu jedem Paar diametral gegenüberliegender Punkte eine **Polare**, d.h. ein Großkreis, deren Pole die beiden Punkte sind (vgl. Abbildung 3.4).
- (ix) Winkel zwischen zwei Geraden = sphärischer Abstand ihrer Pole.

Jetzt betrachten wir **sphärische** Dreiecke, die durch drei Großkreisbögen begrenzt werden.

Abbildung 3.3:



Satz 4. (Seiten-Cosinussatz) Für ein sphärisches Dreieck mit Seitenlängen und Winkeln, wie in Abbildung 3.4 angegeben, gilt

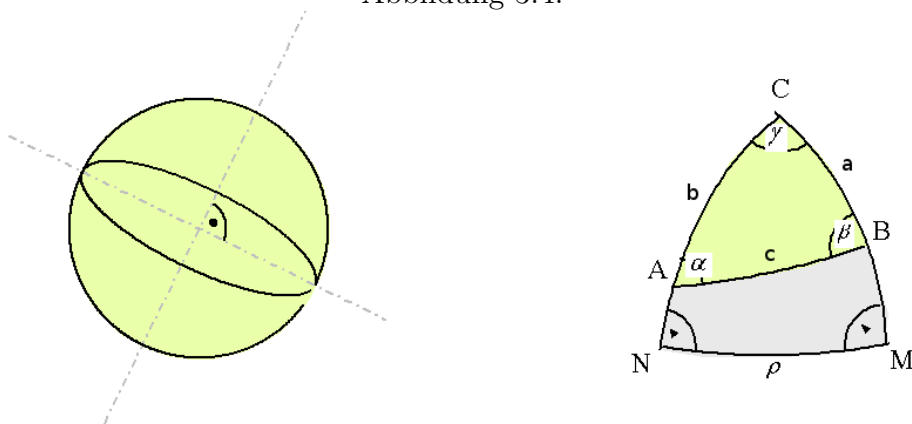
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma,$$

Beweis. Sei p die Polare zu C , d.h. \widehat{AC} und \widehat{BC} sind Lote auf p , die p in N bzw. M schneiden. Für die sphärischen Längen gilt dann

$$|\widehat{MN}| = \gamma, \quad |\widehat{CM}| = |\widehat{CN}| = \frac{\pi}{2} \quad (\text{vgl. Abbildung 3.4})$$

Gesucht ist also der wahre Winkel $\angle AOB$ (Seite c). Dazu führt man räumliche Koordi-

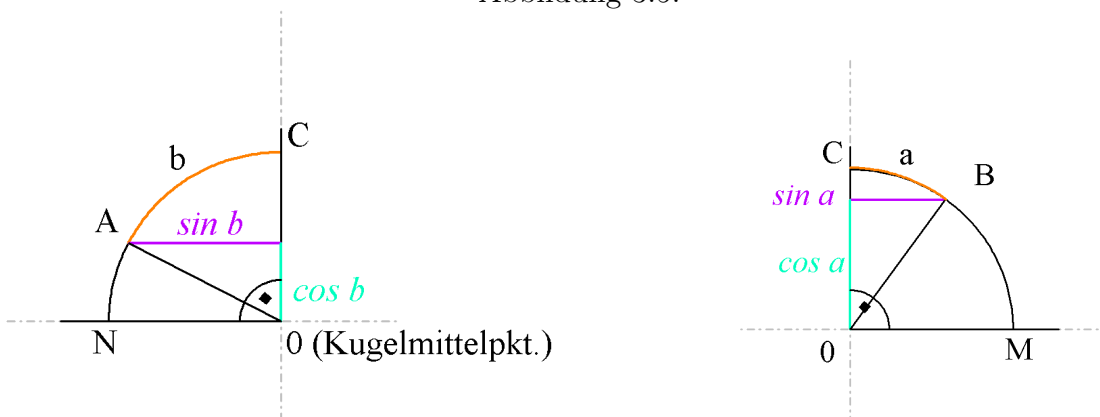
Abbildung 3.4:



naten ein (vgl. Abbildung 3.4).

$$\begin{array}{ll} 0 &= (0, 0, 0) & A &= (\sin b, 0, \cos b) \\ N &= (1, 0, 0) & M &= (\cos \gamma, \sin \gamma, 0) \\ C &= (0, 0, 1) & B &= (\sin a \cos \gamma, \sin a \sin \gamma, \cos a) \end{array}$$

Abbildung 3.5:



Ebene des Großkreises b ; Ebene des Großkreises a , $0 =$ Kugelmittelpunkt

Nun berechnet man die euklidischen Abstände in \mathbb{R}^3 .

$$\begin{aligned} 1 &= |\overline{OA}| = |\overline{OB}| = |\overline{OC}| = |\overline{ON}| = |\overline{OM}|, \\ |\overline{AB}|^2 &= (\sin a \cos \gamma - \sin b)^2 + \sin^2 a \sin^2 \gamma + (\cos a - \cos b)^2, \end{aligned}$$

Man wendet den ebenen Cosinussatz auf das Dreieck $\triangle OAB$ an und erhält

$$|\overline{AB}|^2 = |\overline{OA}|^2 + |\overline{OB}|^2 - 2|\overline{OA}||\overline{OB}|\cos c = 2 + 2\cos c.$$

Nun setzen wir ein.

$$\begin{aligned} 2\cos c &= 2 - (\sin a \cos \gamma - \sin b)^2 - \sin^2 a \sin^2 \gamma - (\cos a - \cos b)^2 \\ &= 1 - \sin^2 a \cos^2 \gamma + 2\sin a \sin b \cos \gamma - \sin^2 a \sin^2 \gamma - \cos^2 a + 2\cos a \cos b \\ &= 2\sin a \sin b \cos \gamma + 2\cos a \cos b. \end{aligned}$$

Satz 5. (*Winkel-Cosinussatz*): *Unter den gleichen Voraussetzungen gilt:*

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c.$$

Beweis. Ähnlich zum Beweis von Satz 4 oder durch Übergang zum polaren Dreieck.

Satz 6. (*sphärischer Sinussatz*) *Unter den gleichen Voraussetzungen gilt*

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}.$$

Beweis. Aus Satz 4 folgt:

$$\cos \gamma = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} \Rightarrow \sin^2 \gamma = \frac{x^2}{\sin^2 a \sin^2 b}$$

mit

$$\begin{aligned} x^2 &= \sin^2 a \sin^2 b - \cos^2 c - \cos^2 a \cos^2 b + 2 \cos a \cos b \cos c \\ &= 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c. \end{aligned}$$

Das ändert sich nicht durch zyklische Vertauschung von a, b, c bzw. α, β, γ , also ist

$$x^2 = \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 \gamma = \sin^2 b \sin^2 c \sin^2 \alpha = \sin^2 c \sin^2 a \sin^2 \beta.$$

Division durch $\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c$ liefert die Behauptung bis auf das Vorzeichen. Dieses stimmt offensichtlich für Dreiecke mit Winkeln und Seiten $< \pi$.

Bemerkung: Es gibt allgemeinere Versionen und viele andere schöne Sätze, zum Beispiel:

Folgerung: Im rechtwinkligen sphärischen Dreieck ist mit $\gamma = \frac{\pi}{2}$

$$\cos c = \cos a \cos b.$$

Satz 7. *Der Flächeninhalt F des sphärischen Dreiecks mit Winkeln α, β, γ ist $F = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ (also insbesondere $\alpha + \beta + \gamma > \pi$ im Gegensatz zur euklidischen Geometrie).*

Beweis. Wie immer ist die Sphäre auf Radius 1 normiert und ihre Gesamtfläche ist, wie man in der Analysis zeigt, 4π . D.h. die Fläche eines Zweiecks, berandet von zwei Großkreisen mit Winkel α , ist 2α (vgl. Abbildung 3.6). Dies sieht man zum Beispiel durch Unterteilung des vollen Winkels in gleiche Teile, falls α rational ist, bzw. im allgemeinen Fall durch Grenzübergang.

Sei nun Z_α das zu α gehörige Zweieck, analog Z_β, Z_γ (vgl. Abbildung 3.6).

Betrachte nun die Halbkugel H , die durch α begrenzt wird und die das Dreieck $D = \triangle ABC$ enthält. Dann gilt

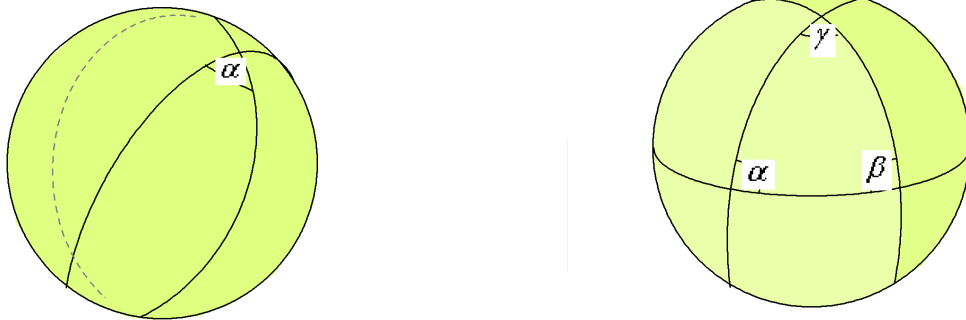
$$H = Z_\beta \dot{\cup} (Z_\gamma \setminus D) \dot{\cup} (Z_\alpha \setminus D)$$

wobei $\dot{\cup}$ die disjunkte Vereinigung bezeichnet. Weil die Fläche von H gleich 2π ist, folgt

$$2\pi = 2\beta + 2\gamma - F + 2\alpha - F$$

und somit die Behauptung.

Abbildung 3.6:



Kapitel 4

Kegelschnitte

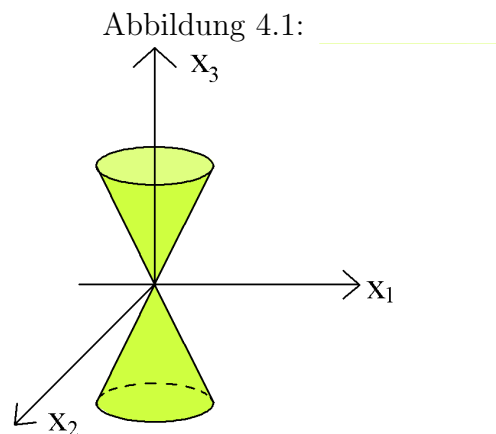
Die Kreisgleichung in der Ebene \mathbb{R}^2 mit Mittelpunkt 0 und Radius r ist gegeben durch

$$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 = r^2.$$

Ein Kegel K in \mathbb{R}^3 ist die Rotationsfläche einer Geraden g um eine Achse a , die g schneidet und **nicht** senkrecht auf g steht. Im folgenden wählen wir immer $a = z$ -Achse. Mit anderen Worten ist eine solche Kegelgleichung im \mathbb{R}^3 mit Spitze in 0 gegeben durch (vgl. Abbildung 4.1):

$$x^2 + y^2 = bz^2. \quad (4.1)$$

Die Punkte auf einem Kegel, die die selbe z -Koordinate haben, liegen auf einem Kreis



parallel zur xy -Ebene. Ein "Kegelschnitt" ist der Schnitt des Kegels K (Gleichung (4.1)) mit einer Ebene E .

Wir möchten jetzt Kegelschnitte näher untersuchen. Weil der Kegel symmetrisch unter Rotation zur z -Achse ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Ebene E senkrecht auf der yz -Ebene steht, d.h. die Gleichung von E ist von der Form

$$uy + vz = w.$$

Wir unterscheiden nun einige verschiedene Fälle.

1. Fall $w = 0 \iff E$ geht durch den Ursprung 0 (entarteter Fall).

Für $v \neq 0$ ist $z = \lambda y$, wobei $\lambda = -\frac{u}{v}$. Dann ist $K \cap E$ gegeben durch

$$x^2 + y^2 = b\lambda^2 \iff x^2 = (b\lambda^2 - 1)y^2$$

Also ist für $b\lambda^2 < 1$ dann $K \cap E = \{0\}$. Für $b\lambda^2 = 1$ ist $K \cap E$ die Gerade $\begin{cases} z = \lambda y \\ x = 0 \end{cases}$.

Schließlich ist für $b\lambda^2 > 1$ der Schnitt $K \cap E$ das Geradenpaar $\begin{cases} z = \lambda y \\ x = \pm\sqrt{b\lambda^2 - 1}y \end{cases}$.

Für $v = 0$ ist der Schnitt das Geradenpaar $\begin{cases} y = u \\ x = \pm\sqrt{b}z \end{cases}$.

2. Fall $w \neq 0 \iff E$ geht nicht durch den Ursprung 0 .

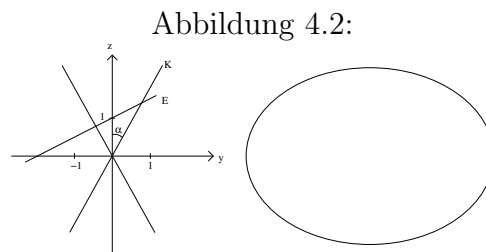
Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass E nicht parallel zur z -Achse ist (sonst verschieben wir E leicht). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt nach zentrischer Streckung am Ursprung dann, dass E durch den Punkt $(1,0,0)$ geht. E ist somit durch die Gleichung

$$\delta: z = 1 + \lambda y$$

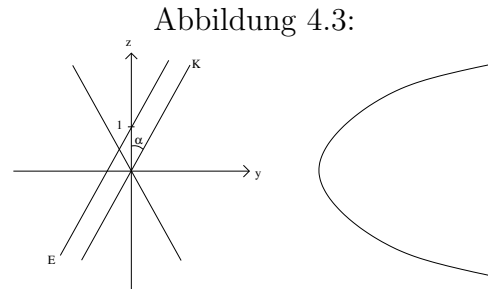
beschrieben.

Die Aufriss-Projektion auf die yz -Ebene sieht folgendermaßen aus

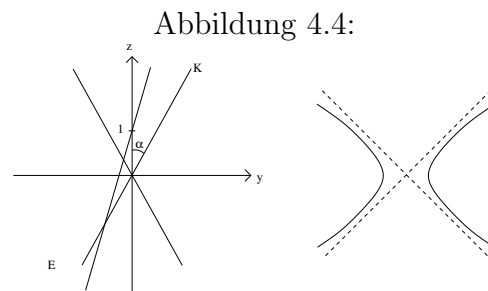
1. Unterfall $|\lambda| < \cot \alpha$



$\implies K \cap E$ ist eine **Ellipse** (vgl. Abbildung 4.2)

2. Unterfall $|\lambda| = \cot \alpha$ 

$\implies K \cap E$ ist eine **Parabel** (vgl. Abbildung 4.3)

3. Unterfall $|\lambda| > \cot \alpha$ 

$\implies K \cap E$ ist eine **Hyperbel** (vgl. Abbildung 4.4)

Bekanntermaßen beschreiben Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln in der Natur die Bahnkurven von Himmelskörpern (1. Keplersches Gesetz). Zum Beispiel sind die Bahnen der Planeten um die Sonne Ellipsen.

Nun wollen wir die obige zeichnerische Beschreibung des Grundrisses (Projektion auf xy -Ebene) von $K \cap E$ noch rechnerisch belegen. Dazu muss man zunächst beachten, dass die Kegelgleichung gegeben ist durch (Bezeichnungen, wie in den Abbildungen 4.2 bis 4.4)

$$x^2 + y^2 = \tan^2 \alpha z^2$$

Setzen wir die Gleichung der Ebene ($y_2 = 1 + \lambda y$) ein, so erhalten wir für den Schnitt

$$x^2 + y^2 = \tan^2 \alpha (1 + 2\lambda y + \lambda^2 y^2)$$

1. Unterfall $|\lambda| < \cot \alpha \iff \lambda^2 \cdot \tan^2 \alpha < 1$

Dann folgt

$$x^2 + (1 - \lambda^2 \tan^2 \alpha)y^2 - 2\lambda \tan^2 \alpha y = \tan^2 \alpha$$

Nach quadratischer Ergänzung

$$x^2 + (1 - \lambda^2 \tan^2 \alpha) \left(y - \frac{\lambda \tan^2 \alpha}{1 - \lambda^2 \tan^2 \alpha} \right)^2 = \frac{\tan^2 \alpha}{1 - \lambda^2 \tan^2 \alpha}$$

Durch Division bringen wir nun die rechte Seite auf 1:

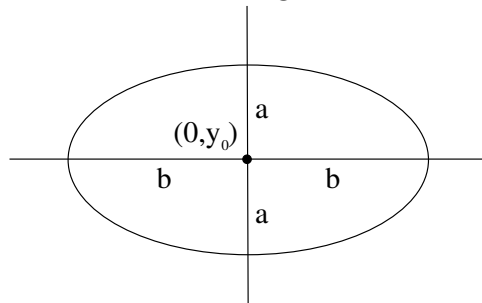
$$\frac{1 - \lambda^2 \tan^2 \alpha}{\tan^2 \alpha} x^2 + \frac{1 - \lambda^2 \tan^2 \alpha}{\tan^2 \alpha} \left(y - \frac{\lambda \tan^2 \alpha}{1 - \lambda^2 \tan^2 \alpha} \right)^2 = 1$$

Die Gleichung ist von der Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad \text{mit } a, b > 0$$

und beschreibt daher eine Ellipse mit Halbachsen a, b und Mittelpunkt $(0, y_0)$

Abbildung 4.5:



Im Spezialfall $\lambda = 0$, d.h. $a = b$, handelt es sich um einen Kreis mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius $\tan \alpha$.

2. Unterfall $\lambda = \cot \alpha \iff \lambda^2 \tan^2 \alpha = 1$

Also gilt

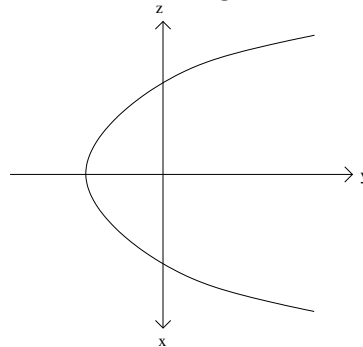
$$x^2 = \tan^2 \alpha + 2\lambda \tan^2 \alpha y$$

Wir lösen nach y auf

$$y = \frac{1}{2\lambda \tan^2 \alpha} x^2 - \frac{1}{2\lambda}$$

und erhalten eine Parabel.

Abbildung 4.6:



3. Unterfall $|\lambda| = \cot \alpha \iff \lambda^2 \tan^2 \alpha > 1$

Wie im 1. Unterfall gilt dann

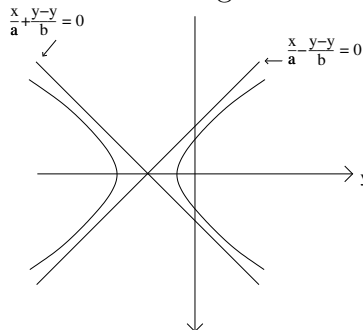
$$-\frac{\lambda^2 \tan^2 \alpha - 1}{\tan^2 \alpha} x^2 + \frac{(1 - \lambda^2 \tan^2 \alpha)^2}{\tan^2 \alpha} \left(y - \frac{\lambda \tan^2 \alpha}{1 - \lambda^2 \tan^2 \alpha} \right)^2 = 1$$

Die Gleichung ist von der Form

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad \text{mit} \quad a, b > c \quad \iff \quad \left(\frac{x}{a} + \frac{(y - y_0)}{b} \right) \left(-\frac{x}{a} + \frac{(y - y_0)}{b} \right) = 1$$

also ist $K \cap E$ eine Hyperbel.

Abbildung 4.7:



Wir möchten (nicht entartete) Kegelschnitte jetzt genauer geometrisch beschreiben. Dafür brauchen wir die **Dandelin'sche Kugeln** := Kugeln mit Mittelpunkt auf der Kegelachse (vgl. Abbildung 4.8), welche den Kegel auf einer Kreislinie und die Schnittebene E in einem Punkt berühren. In der Aufrisszeichnung (wieder mit $E||x_2$ -Achse) sind dies also

In- bzw. Ankreise eines Dreiecks.

Die Berührungspunkte mit E heißen Brennpunkte F_1, F_2 (bzw. F) des Kegelschnitts. Man beachte, dass es im Parabelfall nur einen Brennpunkt gibt.

Abbildung 4.8:

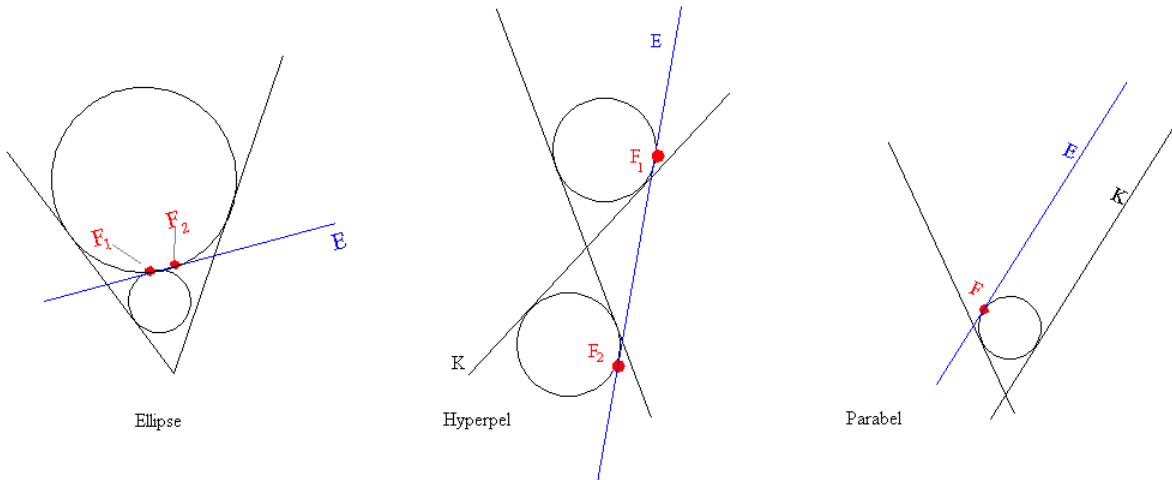
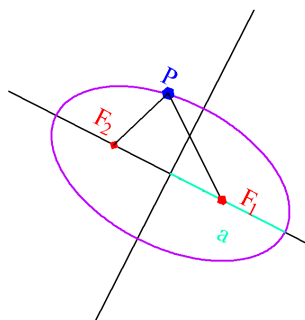


Abbildung 4.9:



Satz 8. Für jeden Punkt P der Ellipse ist die Summe der Abstände zu den Brennpunkten F_1, F_2 konstant. Genauer gilt

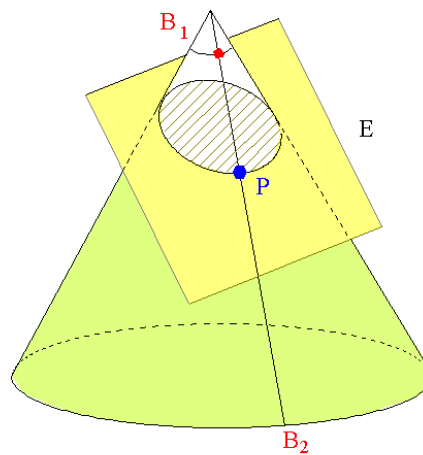
$$|PF_1| + |PF_2| = 2a,$$

wobei a die Länge der großen Halbachse ist (vgl. Abbildung 4.9).

Bemerkung 1. Eine Ellipse kann folglich mit einem Stück Schnur konstruiert werden, dessen Enden an den Brennpunkten befestigt sind.

Beweis. Die Ellipse sei der Schnitt der Ebene E mit dem Kegel K (vgl. Abbildung 4.10). Nun lege man durch P eine Mantellinie von der Kegelspitze durch P . Diese berührt die

Abbildung 4.10:



Berührungskreise der Dandelin'schen Kugeln in den Punkten B_1 und B_2 . Beachte, dass PB_1 die Tangente an eine Dandelin'sche Kugel ist, die die Kugel in B_1 berührt und PF_1 die Tangente an dieselbe Dandelin'sche Kugel ist, die die Kugel in F_1 berührt. Also gilt

$$|PB_1| = |PF_1|$$

und analog

$$|PB_2| = |PF_2|.$$

Folglich

$$|PF_1| + |PF_2| = |PB_1| + |PB_2|.$$

Andererseits ist $|PB_1| + |PB_2|$ konstant, weil Berührungskreise auf dem Kegel senkrecht zur Kegelachse stehen und daher auf allen Mantellinien den gleichen Abstand haben ($|PB_1| + |PB_2| = |B_1B_2|$). Durch Ausprobieren auf der großen Halbachse sieht man, dass $|PF_1| + |PF_2| = 2a$ sein muss. \square

Analog beweist man (Übungsaufgabe).

Satz 9. Für jeden Punkt P einer Hyperbel ist die Differenz der Abstände zu den Bonuspunkten konstant d.h.

$$||PF_1| - |PF_2|| = \text{konst.}$$

Folgerung: Gärtnerkonstruktion der Ellipse.

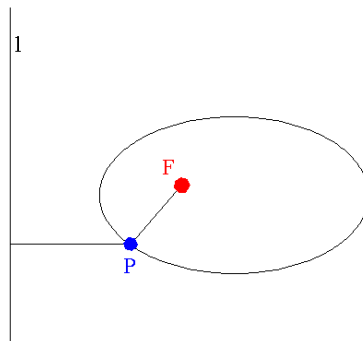
Satz 10. Sei $K \cap E$ eine Ellipse mit Brennpunkten $F_1 \neq F_2$ und großer Halbachse a (vgl. Abbildung 4.11). Es existieren Geraden l_1 und l_2 mit der folgenden Eigenschaft:

$$\forall P \in K \cap E \text{ gilt: } \frac{|PF_1|}{|Pl_1|} = \frac{|PF_2|}{|Pl_2|} = \frac{|F_1F_2|}{|2a|} =: \epsilon.$$

Definition 1. l_1 und l_2 heißen **Leitgeraden** und $0 \leq \epsilon < 1$ heißt **Exzentrizität** der Ellipse.

Bemerkung 2. Bei einem Kreis ist $F_1 = F_2 = M$ (Mittelpunkt) und deshalb $\epsilon = 0$. Daher gibt es in diesem Fall keine Leitgerade.

Abbildung 4.11:



Beweis. Seien E_1, E_2 die beiden Ebenen, in denen die Dandelin-Kugeln den Kegel berühren (beide senkrecht zur z -Achse). Wir setzen:

$$l_1 := E_1 \cap E, \quad l_2 := E_2 \cap E.$$

□

Dann sind l_1 und l_2 beide parallel zur x -Achse (sie stehen senkrecht zur yz -Ebene). Sei nun P ein beliebiger Punkt der Ellipse $K \cap E$ und m wie in Satz 8 die Mantellinie von K durch P . Diese geht durch 0 und P . Mit B_1, B_2 bezeichnen wir wieder die Berührungspunkte von m mit den Dandelin'schen Kugeln. h sei die Senkrechte auf l_1 und l_2 durch P (diese liegt in E) und L_1 den Schnittpunkt von h mit l_1 und L_2 der Schnittpunkt von h mit l_2 (vgl. Abbildung 4.12)

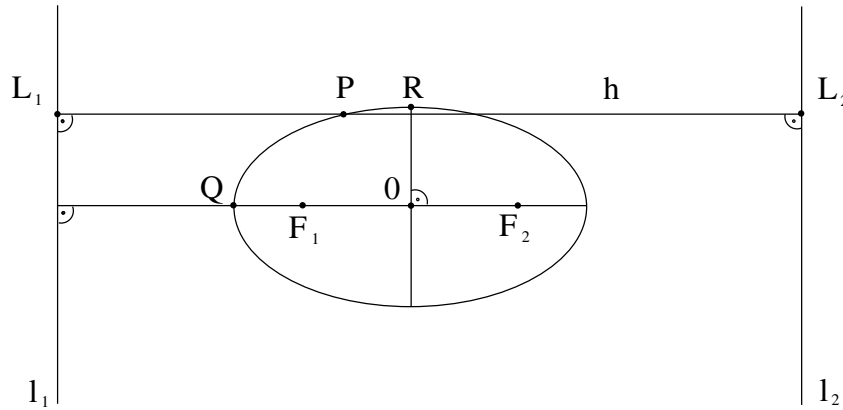
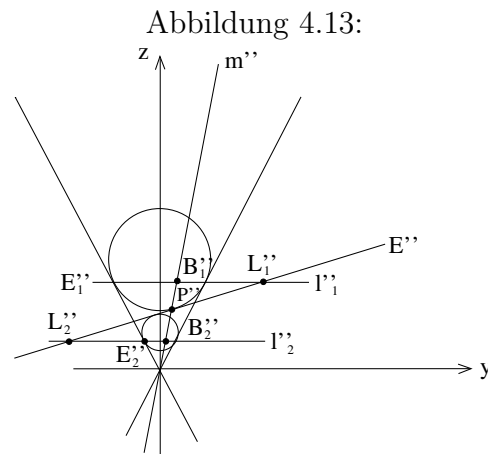


Abbildung 4.12: Zeichnung in der Ebene E

Dann folgt

$$|Pl_1| + |Pl_2| = |PL_1| + |PL_2| = \text{konst.} = |l_1l_2|$$

Wir betrachten nun die Aufrisszeichnung



Mit Hilfe des Strahlensatzes sieht man dann

$$\frac{|P''B_1''|}{|P''B_2''|} = \frac{|P''L_1''|}{|P''L_2''|}$$

Weil die Längenverhältnisse von Geraden bei der Zweitafelprojektion erhalten bleiben, folgt

$$\frac{|PB_1|}{|PB_2|} = \frac{|PL_1|}{|PL_2|} \iff \frac{|PB_1|}{|PL_1|} = \frac{|PB_2|}{|PL_2|}.$$

Wie im Beweis von Satz 8 gilt $|PB_1| = |PF_1|$ und $|PB_2| = |PF_2|$. Daher

$$\begin{aligned} \frac{|PF_1|}{|Pl_1|} &= \frac{|PF_2|}{|Pl_2|} =: \epsilon(P) \\ \Rightarrow 2a &= |PF_1| + |PF_2| = \epsilon(P) \cdot (|Pl_1| + |Pl_2|) = \epsilon(P) |l_1 \cdot l_2| \\ \Rightarrow \epsilon(P) &= \frac{2a}{|l_1 l_2|} = \text{konst.} =: \epsilon. \end{aligned}$$

Es ist jetzt noch zu zeigen, dass

$$\frac{2a}{|l_1 l_2|} = \frac{|F_1 F_2|}{2a}.$$

Setze

$$\epsilon' := \frac{|F_1 F_2|}{2a} = \frac{2|MF_1|}{2a} = \frac{|MF_1|}{a},$$

wobei M der Mittelpunkt der Ellipse ist.

Sei nun Q der Ellipsenpunkt zwischen l_1 und F_1 auf der großen Halbachse (vgl. Abbildung 4.12). Dann gilt

$$|Ql_1| = \frac{|QF_1|}{\epsilon} = \frac{a - |MF_1|}{\epsilon} = \frac{a - \epsilon' a}{\epsilon} = \frac{1 - \epsilon'}{\epsilon} \cdot a.$$

Andererseits

$$|Ql_1| = |Ml_1| - a = |Rl_1| - a = \frac{RF_1}{\epsilon} - a = \frac{a}{\epsilon} - a = \frac{1 - \epsilon}{\epsilon} \cdot a.$$

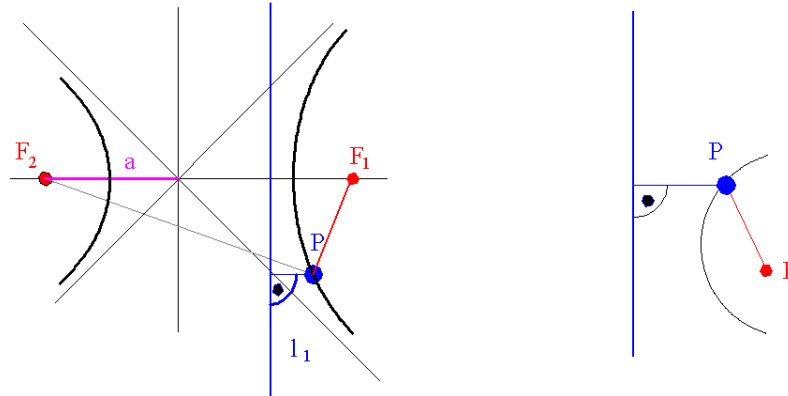
Das heißt $\epsilon = \epsilon'$.

Ganz ähnlich beweist man:

Satz 11. (i) Sei $K \cap E$ eine Hyperbel mit Brennpunkten F_1, F_2 , dann gibt es zwei Leitgeraden l_1 und l_2 mit der Eigenschaft (vgl. Abbildung 4.14):

$$\forall P \in K \cap E \quad \text{gilt:} \quad \frac{|PF_1|}{|Pl_1|} = \frac{|PF_2|}{|Pl_2|} = \frac{|F_1 F_2|}{2a} =: \epsilon > 1.$$

Abbildung 4.14:



(ii) Sei $K \cap E$ eine Parabel. Dann gibt es eine Leitgerade l mit der Eigenschaft (vgl. Abbildung 4.14):

$$\forall P \in K \cap E \quad \text{gilt:} \quad |PF| = Pl_1$$

d.h. $\epsilon = 1$ für eine Parabel.

Der Beweis lässt sich natürlich auch rechnerisch mit Koordinaten führen. Wir wollen dies am Beispiel der Parabel $2x = y^2 + 1$ zeigen. Mit

$$F = (1, 0) \quad \text{und} \quad l = \{(0, y) | y \in \mathbb{R}\} \text{ (y - Achse)}$$

ist für alle $P = (x, y)$ der Abstand $|Pl| = |x|$ und $|PF| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$. Also gilt

$$x^2 = (x-1)^2 + y^2 \Leftrightarrow 2x = y^2 + 1.$$

Die Leitlinieneigenschaft kann man also auch als Definition von Parabeln, Ellipsen und Hyperbeln verwenden!

Wir betrachten nun allgemeiner eine Gleichung der Form

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Dies beschreibt eine **Quadrik**, d.h. eine Menge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\}$$

Eine solche Quadrik lässt sich (falls das quadratische Polynom $\neq 0$ ist) durch Kongruenzabbildungen (= Translationen, Spiegelungen, Drehungen) in

$$\left. \begin{array}{ll} \text{die leere Menge} & \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1\right) \\ \text{einen Punkt} & \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0\right) \\ \text{eine Gerade} & (ax + by + c = 0) \\ \text{ein Geradenpaar} & \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0\right) \end{array} \right\} \text{entartete Fälle,}$$

oder in

$$\begin{array}{ll} \text{eine Ellipse} & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \text{eine Hyperbel} & \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \text{eine Parabel} & kx = y^2 \end{array}$$

überführen.

Verwendet man noch allgemeinere Transformationen, lassen sich die Gleichungen noch weiter vereinfachen: Eine "affine" Transformation

$$(x, y) \mapsto (x, z), \quad z = \frac{a}{b}y$$

macht aus

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

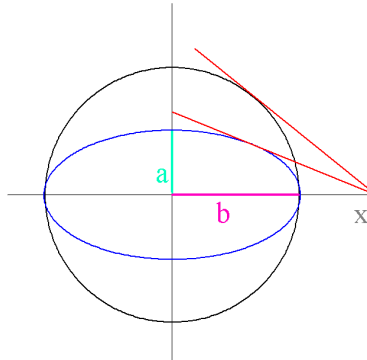
die Kreisgleichung

$$x^2 + z^2 = a^2$$

Umgekehrt ist eine Ellipse affines Bild des Kreises: alle y -Koordinaten werden um den Faktor $\frac{b}{a}$ verkürzt. Wichtig ist dies z.B. für die Konstruktion von Tangenten (vgl. Abbildung 4.15). Aus Kreistangenten werden Ellipsentangenten, wenn der Punkt auf der x -Achse bleibt und die Steigung mit $\frac{b}{a}$ multipliziert wird.

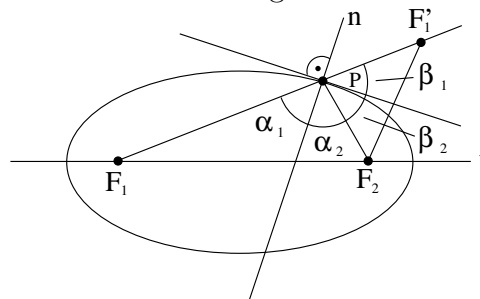
Auch kann man damit nachrechnen, dass das Volumen der Ellipse $\frac{b}{a}\pi a^2 = \pi ab$ ist.

Abbildung 4.15:



Satz 12. Sei E eine Ellipse mit Brennpunkten F_1 und F_2 . In jedem Ellipsenpunkt P wird der Winkel $\angle F_1PF_2$ von den Normalen halbiert (vgl. Abbildung 4.16)

Abbildung 4.16:



Physikalisch ausgedrückt heißt das, dass ein Lichtstrahl von F_1 nach P an der Ellipse nach F_2 abgelenkt wird. Eine andere mögliche Anwendung ist das „Flüstergewölbe“.

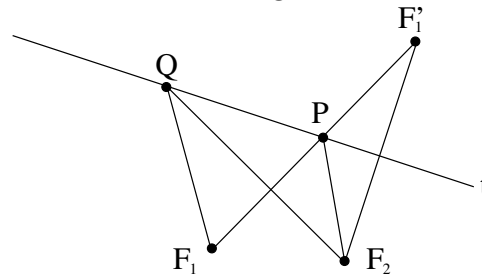
Beweis. Nach Satz 8 wissen wir, dass $|PF_1| + |PF_2| = 2a$ ist, wobei a die Länge der großen Halbachse ist. Wir definieren F'_1 als den Punkt auf der Geraden F_1P mit $|F'_1F_1| = 2a$ und $|F'_1P| < 2a$. Mit t wird die Mittelsenkrechte zwischen F'_1 und F_2 bezeichnet. Es soll nun gezeigt werden, dass t die Tangente an die Ellipse in P ist.

Wegen

$$|F'_1P| = |F'_1F_1| - |F_1P| = 2a - |F_1P| = |PF_2|$$

liegt P auf t .

Abbildung 4.17:



Es ist also noch zu zeigen, dass kein anderer Punkt von E auf t liegt. Sei $Q \in E, Q \neq P$. Dann liegt Q **nicht** auf der Geraden F_1F_1' . Daher

$$|QF_1'| + |QF_1| > |F_1F_1'| = 2a = |QF_1| + |QF_2|.$$

Dabei haben wir im ersten Schritt die Dreiecksungleichung verwendet und im zweiten die Definition von F_1' . Es folgt

$$|QF_1'| > |QF_2|,$$

also $Q \notin t$ (vgl. auch Abbildung 4.17).

Sei nun n die Senkrechte auf t durch P . Diese wird auch Normale zur Ellipse durch P genannt. Es gilt

$$|F_1'P| = |F_2P| \quad \text{und} \quad t \perp F_2F_1'$$

also $\beta_1 = \beta_2$ in der Skizze. Es folgt die Behauptung:

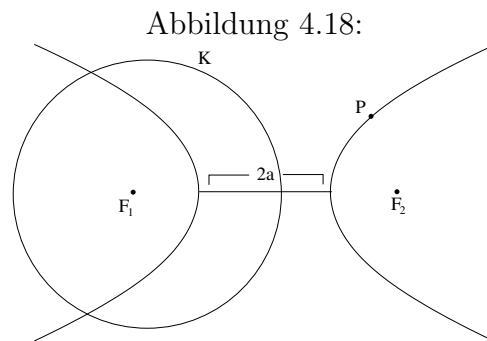
$$\alpha_1 = 90^\circ - \beta_1 = 90^\circ - \beta_2 = \alpha_2.$$

□

Folgerung aus dem Beweis: Die Ellipse ist der "geometrische Ort" aller Punkte (heißt: ihre Punkte können charakterisiert werden durch die Eigenschaft), welche von einem Kreis –nämlich um F_1 mit Radius $2a$ – und einen Punkt im Innern des Kreises –nämlich F_2 – den gleichen Abstand haben.

Die analoge Eigenschaft der Hyperbel ist: Eine Hyperbel ist der geometrische Ort aller Punkte, welche um einen Kreis und einen Punkt im Äußeren des Kreises den gleichen Abstand haben (vgl. Abbildung 4.18). Der Kreis K hat den Mittelpunkt F_1 und den Radius $2a$ und der Punkt ist F_2 . Begründung:

$$|F_1P| - |F_2P| = 2a \iff |F_2P| = |F_1P| - 2a = \text{Abstand zum Kreis}$$



Für den anderen Hyperbelast verwendet man einen Kreis K mit Mittelpunkt und F_2 und Radius $2a$ und den Punkt F_1 .

Satz 13. *Sei P ein beliebiger Punkt auf einer Parabel mit Brennpunkt F und Leitgerade l . Sei L der Fußpunkt des Lots von P auf l . Dann halbiert die Tangente durch P den Winkel $\angle FPL$.*

Physikalisch bedeutet dies, dass senkrecht zur Leitgerade anfallende Lichtstrahlen alle in den Brennpunkt reflektiert werden. Dies macht man sich beim Parabolspiegel zunutzen. Ein Parabolspiegel ist die Rotationsfläche, die beim Rotieren einer Parabel um die Achse senkrecht zu l durch F entsteht.

Beweis. Wegen $|PF| = |PL|$ ist PFL ein gleichschenkliges Dreieck. Sei nun t die Mittelsenkrechte zu F und l . Wir zeigen wieder, dass t die Tangente an die Parabel ist. Sei also Q ein anderer Parabelpunkt und L' der Fußpunkt des Lots durch Q auf l . Dann gilt

$$|FQ| = |L'Q| < |LQ|$$

weil $L' \neq L$ und LQL' rechtwinklig ist. Also $Q \neq t$. Daraus folgt die Behauptung. \square

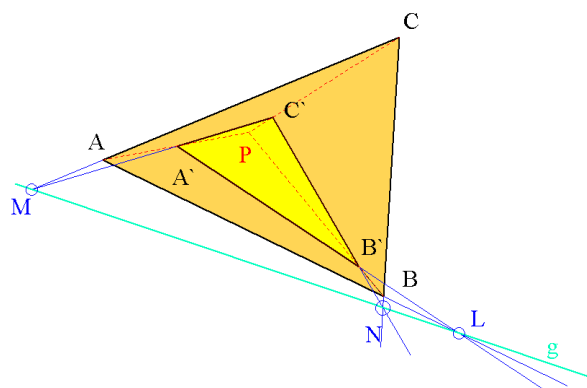
Kapitel 5

Die Sätze von Desargues und Pappos

In diesem Kapitel wollen wir zwei wichtige Sätze der ebenen Geometrie kennenlernen.

Satz 14. (*"Großer Satz von Desargues"*) Seien ABC , $A'B'C'$ zwei ebene Dreiecke in "perspektiver Lage", d.h. die Geraden AA' , BB' , CC' schneiden sich in einem Punkt P . Seien M, L, N die Schnittpunkte der entsprechenden Dreieckseiten, d.h. $M := AC \cap A'C'$, $L := AB \cap A'B'$, $N = BC \cap B'C'$. Dann liegen M, L, N auf einer Geraden (sind **kollinear**) (vgl. Abbildung 5.1).

Abbildung 5.1:



Beweis. Die Zeichnung lässt sich interpretieren als die Grundrisszeichnung einer räumlichen Pyramide mit dreieckiger Fläche ABC und Spitze P (vgl. Abbildungen 5.1 und 5.2). A' liegt auf der Kante \overline{AP} und B' liegt auf der Kante \overline{BP} und C' liegt auf der Kante \overline{CP} .

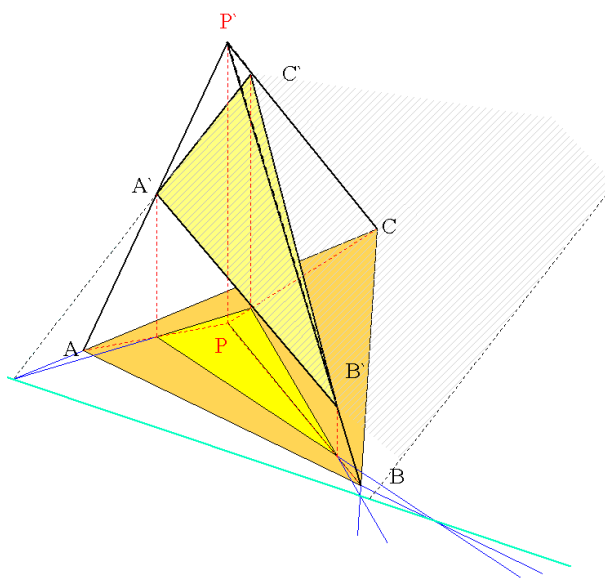
Sei g die Schnittgerade von der Grundrissebene und der Ebene durch $A'B'C'$. Wir wollen nun zeigen, dass M, N, L alle auf der Geraden g liegen.

Begründung

$$\left. \begin{array}{l} M \in AC \implies M \in \text{Grundrissebene} \\ M \in A'C' \implies M \in \text{Ebene durch } A'B'C' \\ N = BC \cap B'C' \implies N \in g \\ L = AB \cap A'B' \implies L \in g \end{array} \right\} \implies M \in g$$

□

Abbildung 5.2:



Wie ändert sich die Aussage des Satzes, wenn nicht alle fraglichen Geraden einen Schnittpunkt haben?

Beispiele

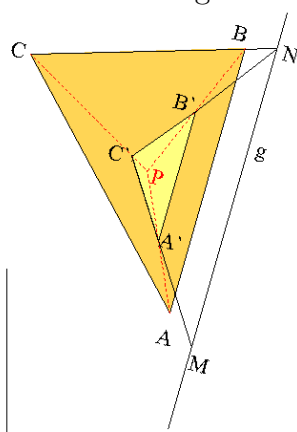
- $AB \parallel A'B'$ und $AC \parallel A'C'$ und $BC \parallel B'C'$ (vgl. Abbildung 5.3). Sei g die Verbindungsgerade von $M = AC \cap A'C'$, $N = BC \cap B'C'$. Dann lautet die Aussage: $g \parallel AB \parallel A'B'$;

Begründung: nach wie vor kann die Zeichnung als Grundrisszeichnung aufgefasst

werden und g als Schnittgerade der Grundrissebene (durch A, B, C) mit der Ebene A', B', C' . Wegen $A'B' \parallel AB$ ist $AB \parallel$ (Ebene durch A', B', C') und daher hat AB keinen Schnittpunkt mit der Ebene durch $A'B'C'$. Also hat AB keinen Schnittpunkt mit g und deswegen $A'B' \parallel g$ und damit schließlich $AB \parallel g$.

- wenn $AB \parallel A'B'$ und $AC \parallel A'C'$, dann muss auch $BC \parallel B'C'$ (Dies ist eine einfache Konsequenz der Strahlensätze).

Abbildung 5.3:

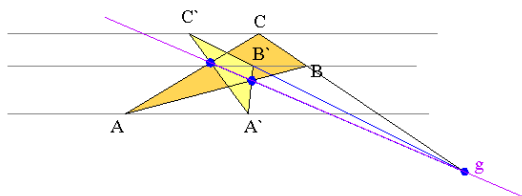


Eine wichtige Variante hiervon ist

Satz 15. ("Kleiner Satz von Desargues") Seien ABC und $A'B'C'$ zwei ebene Dreiecke, so dass die Geraden $AA' \parallel BB' \parallel CC'$, dann liegen die Schnittpunkte $AB \cap A'B'$, $AC \cap A'C'$ und $BC \cap B'C'$ auf einer Geraden g (vgl. Abbildung 5.4).

Beweis. Man fasse die Zeichnung als Grundriss eines Dreiecksprismas auf, das von den drei parallelen Geraden f, g, h begrenzt wird, wobei A, A' auf f und B, B' auf g und C, C' auf h liegen. Dann sind L, M, N auf der Schnittgeraden der Dreiecksebene E von ABC und E' von $A'B'C'$. Also liegen L, M, N auf einer Geraden. \square

Abbildung 5.4:

Bemerkungen:

- "Perspektive Lage" ist hier ersetzt durch Lage auf drei Parallelen.
- Auffallend ist die Analogie zwischen Parallelität und Schnitt.
- Man sagt auch, dass sich die Geraden AA' , BB' und CC' im Unendlichen schneiden.
- Mithilfe der projektiven Geometrie können alle Varianten als einzige Aussage formuliert werden!

Satz 16. (Pappos) Seien g und h zwei sich schneidende Geraden in der Ebene und $Z = g \cap h$ und seien sechs Punkte $A_1, A_2, A_3 \in g$ und $B_1, B_2, B_3 \in h$ gegeben. Dann sind die Schnittpunkte $Q_{12} = A_1B_2 \cap A_2B_1$, $Q_{23} = A_2B_3 \cap A_3B_2$ und $Q_{13} = A_1B_3 \cap A_3B_1$ kollinear (vgl. Abbildung 5.5).

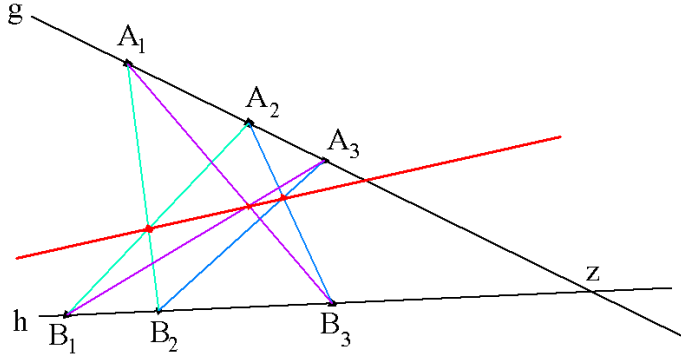
Beweis. Wähle Z als 0-Punkt des Koordinatensystems und identifiziere alle Punkte mit Vektoren, also $A_1 = v$, $B_1 = w$ (linear unabhängig), $A_2 = rv$, $A_3 = sv$ ($1, r, s$ paarweise verschieden und in \mathbb{R}) und entsprechend $B_2 = tw$, $B_3 = uw$ ($1, t, u$ paarweise verschieden und in \mathbb{R}). Dann ist einerseits

$$Q_{12} = v + x(tw - v) = (1 - x)v + xtw,$$

und andererseits

$$Q_{12} = w + y(rv - w) = (1 - y)w + yrv.$$

Abbildung 5.5:



Wir vergleichen die Koeffizienten

$$\left. \begin{array}{l} 1 - x = yr \\ xt = 1 - y \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 1 = yr + x \\ 1 = y + xt \end{array} \right\} \Rightarrow y(r - 1) = x(t - 1) = \frac{(t - 1)(r - 1)}{rt - 1},$$

weil die obigen Gleichungen auch

$$-x = \frac{r + -1}{r - 1}$$

implizieren. Ganz analog zeigt man:

$$Q_{13} = (1 - a)v + auw = (1 - b)w + bsv \quad \text{mit} \quad b(s - 1) = a(u - 1) = \frac{(s - 1)(u - 1)}{su - 1},$$

$$Q_{23} = (1 - c)rv + cuw = (1 - d)tw + dsv \quad \text{mit} \quad dt(s - r) = cr(u - t)$$

$$\Rightarrow d = \frac{r(u - t)}{su - tr}, \quad c = \frac{t(s - r)}{su - tr},$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} Q_{12} &= \frac{r(t - 1)}{rt - 1}v + \frac{t(r - 1)}{rt - 1}w \\ Q_{13} &= \frac{s(u - 1)}{us - 1}v + \frac{u(s - 1)}{us - 1}w \\ Q_{23} &= \frac{rs(u - t)}{su - tr}v + \frac{ut(s - r)}{su - tr}w, \end{aligned}$$

woraus folgt

$$(us - tr)Q_{23} = -su(rt - 1)Q_{12} + rt(us - 1)Q_{13}$$

und daher:

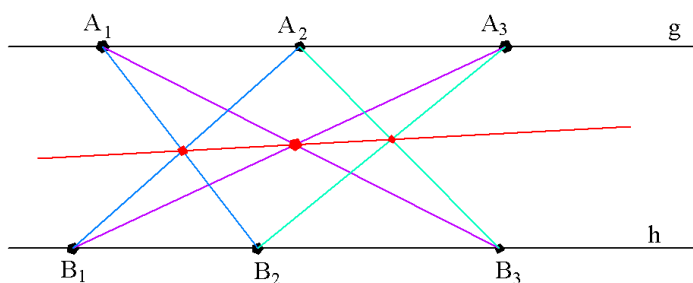
$$-su \frac{rt - 1}{us - rt} Q_{12} + rt \frac{us - 1}{us - rt} Q_{13} = Q_{23}$$

Die drei Punkte sind kollinear, weil

$$-su \frac{rt - 1}{us - rt} + rt \frac{us - 1}{us - rt} = 1 \quad \square$$

Satz 17. (Pappos) Die Aussage des Satzes bleibt erhalten, wenn $g \parallel h$ (vgl. Abbildung 5.6).

Abbildung 5.6:



Beweis. Ganz ähnlich wie bei Satz 15. □

Was passiert, wenn z.B. $A_1B_2 \parallel B_1A_2$, also wenn gar kein Schnittpunkt Q_{12} existiert (vgl. vgl. Abbildung 5.7 und 5.8)? Dann ist $Q_{23}Q_{13} \parallel A_1B_2$, wie man entweder direkt nachrechnen kann oder wie wir in Kapitel 7 zeigen werden.

Abbildung 5.7:

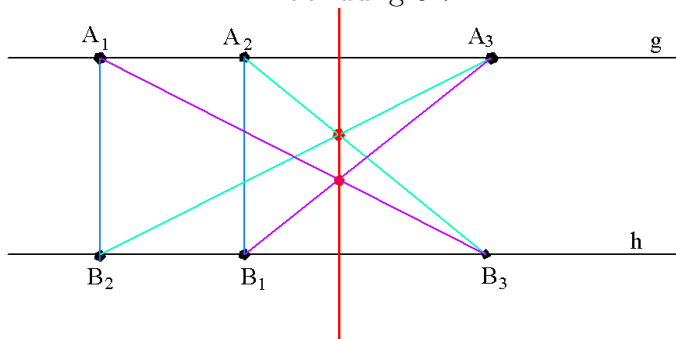
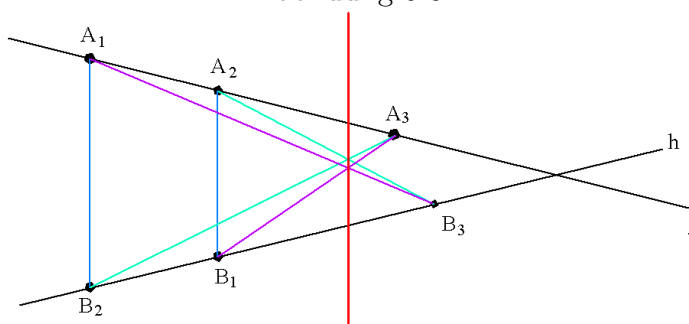


Abbildung 5.8:



Bemerkung: Alle diese Varianten können mithilfe von projektiver Geometrie komprimiert in einer Aussage formuliert werden. Zum Abschluss formulieren wir noch eine allgemeine Variante .

Satz 18. (*Pappos, Pascal*) Sei K ein Kegelschnitt und $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 \in K$, so dass $Q_{12} := A_1B_2 \cap A_2B_1$ und $Q_{13} := A_1B_3 \cap A_3B_1$ und $Q_{23} := A_2B_3 \cap A_3B_2$ existieren. Dann liegen Q_{12}, Q_{13} und Q_{23} auf einer Geraden (vgl. Abbildung 5.9)

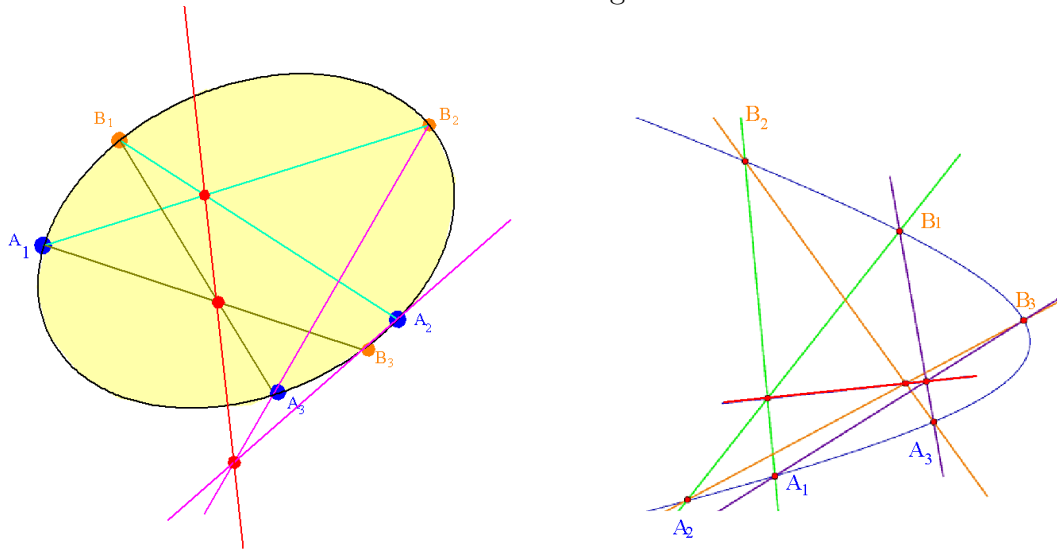
Bemerkung:

- Satz 15 ist ein Spezialfall von Satz 18, denn zwei sich schneidende Geraden sind ein entarteter Kegelschnitt.
- Satz 18 kann auch allgemein in der Sprache der projektiven Geometrie formuliert werden.

An dieser Stelle wird auf einen Beweis von Satz 18 verzichtet; man beweist ihn rechnerisch

in projektiven Koordinaten.

Abbildung 5.9:



Kapitel 6

Affine und projektive Ebenen

Ziel dieses Kapitels ist die axiomatische Beschreibung der Geometrie in der Ebene. Dazu werden Geraden und Punkte in der Ebene abstrahiert. Genauer ist \mathcal{P} eine Menge von Punkten und \mathcal{G} eine Menge von "Geraden", wobei jedes $g \in \mathcal{G}$ eine Teilmenge von \mathcal{P} ist, d.h. $g \subset \mathcal{P}$.

Definition 2. Zwei Geraden $g, h \in \mathcal{G}$ heißen **parallel**, falls $g \cap h = \emptyset$ (leere Menge) oder $g = h$. Wir schreiben in diesem Fall $g \parallel h$.

Definition 3. $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ heißt **affine Ebene**, falls

- (i) $\forall P, Q \in \mathcal{P}$ mit $P \neq Q \exists! g \in \mathcal{G}$ mit $P, Q \in g$ (**Verbindungsaxiom**);
- (ii) $\forall g \in \mathcal{G}, \forall P \in \mathcal{P} \exists! h \in \mathcal{G}$ mit $h \parallel g$ und $P \in h$.
- (iii) Es gibt vier Punkte, von denen je drei nicht kollinear sind (**Reichhaltigkeitsaxiom**).

Beispiele:

- (i) Der \mathbb{R}^2 mit seiner üblichen Geometrie also $\mathcal{P} = \{\text{Punkte in } \mathbb{R}^2\}$ und $\mathcal{G} = \{\text{Geraden in } \mathbb{R}^2\}$ ist eine affine Ebene der Ordnung ¹ ∞ .

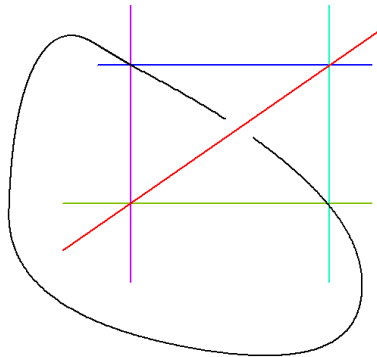
¹Der Begriff der Ordnung wird erst auf den folgenden Seiten definiert. Es empfiehlt sich an der entsprechenden Stelle nochmals zu diesen Beispielen zurückzukehren.

(ii) Das kleinstmögliche Beispiel ist



als Punktmenge mit den Geraden wie in Abbildung 6.1 angedeutet mit genau drei

Abbildung 6.1:



Parallelenscharen. Dies ist eine affine Ebene, mit Ordnung 2.

Genauer ist hier

$$\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$$

und

$$\mathcal{G} = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, P_3\}, \{P_1, P_4\}, \{P_2, P_3\}, \{P_2, P_4\}, \{P_3, P_4\}\}.$$

Dann sind 1. und 3. aus der Definition offensichtlich erfüllt. Ist $g = \{\text{zwei Punkte}\}$ so wählt man $h = \{\text{andere zwei Punkte}\}$ und hat damit auch Eigenschaft 2. nachgewiesen.

Einige einfache Konsequenzen:

(i) Je zwei Geraden g, h sind parallel oder schneiden sich in genau einem Punkt. Denn

Abbildung 6.2:



ist unmöglich wegen 1.

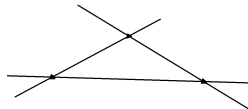
(ii) Es gilt

- a) **Reflexivität:** $\forall g \in \mathcal{G}$ ist $g \parallel g$ (klar)
- b) **Symmetrie:** $\forall g, h \in \mathcal{G}$ folgt aus $g \parallel h$, dass $h \parallel g$ (klar)
- c) **Transitivität:** $\forall g, h, k \in \mathcal{G}$ folgt aus $g \parallel h$ und $h \parallel k$, dass $g \parallel k$

Man sagt daher, dass Parallelität eine Äquivalenzrelation ist. Zum Nachweis von c) sei $g \parallel h \cap h \parallel k$ und wir nehmen an, dass $g \neq k$ und $g, h \neq \emptyset$, d.h. $\exists P \in g \cap k$. Dann besäße h durch P zwei Parallelen. Dies ist ein Widerspruch zu 2 aus der Definition. Für $g \in \mathcal{G}$ heißt $P(g) = \{h \in \mathcal{G} \text{ mit } h \parallel g\}$ Parallelschar.

- (iii) Zwei verschiedene Parallelscharen haben stets leeren Schnitt, denn haben $P(g)$ und $P(k)$ keinen leeren Schnitt, dann sind g und k bereits parallel und daher $P(g) = P(k)$.
- (iv) Es gibt mindestens drei verschiedene Parallelscharen (vgl. Abbildung 6.3).
Begründung: Wegen des Reichhaltigkeitsaxioms gibt es $P, Q, R \in \mathcal{P}$, so dass P, Q, R nicht auf einer Geraden liegen. Wegen des Verbindungsaxioms existiert eine Gerade g mit $P, Q \in g$ und eine Gerade h mit $Q, R \in h$ und eine Gerade k mit $Q, R \in k$. Weil P, Q, R nicht auf einer Geraden liegen, gilt $g \neq h \neq k \neq g$ und die drei Geraden haben jeweils nicht-leeren Schnitt, sind also nicht parallel.

Abbildung 6.3:



Satz 19. *Auf jeder Parallelschar π liegen gleich viele Geraden. Ihre Anzahl (möglicherweise ∞) ist gleich der Anzahl der Punkte auf jeder Geraden.*

Beweis. Seien $P(g_1)$ und $P(g_2)$ zwei verschiedene Parallelscharen. Dann ist $g_1 \not\parallel g_2$ und für $P \in g_1 \exists! h \parallel g_2$ mit $P \in h$. Andererseits existiert für $h \parallel g_2$ genau ein $P \in h \cap g_1$. Wir erhalten also eine Bijektion $g_1 \longleftrightarrow P(g_2)$.

Das heißt g_1 und $P(g_2)$ haben gleich viele Elemente. Es folgt, dass auf jeder Parallelschar gleich viele Elemente liegen, denn für $P(g_1)$ und $P(g_2)$ verschieden, existiert eine dritte Parallelschar $P(g_3) \neq P(g_1), P(g_2)$, also zwei Bijektionen.

$$P(g_1) \longleftrightarrow g_3 \longleftrightarrow P(g_2)$$

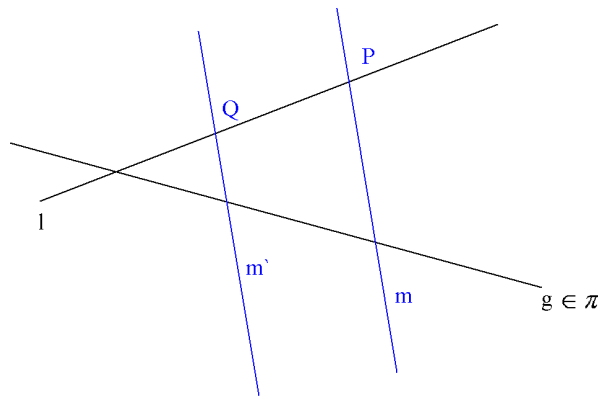
Ebenso liegen auf jeder Geraden gleich viele Punkte. Denn für g_1, g_2 gibt es g_3 mit $g_3 \parallel g_1$ und $g_3 \parallel g_2$ und dann zwei Bijektionen

$$g_1 \longleftrightarrow P(g_3) \longleftrightarrow g_2$$

Wir haben also gezeigt, dass die Anzahl der Punkte auf einer Geraden gleich der Anzahl der Geraden h einer Parallelschar ist.

Definition 4. Diese Anzahl wird **Ordnung** der affinen Ebene genannt.

Abbildung 6.4:



Satz 20. Sei (P, \mathcal{G}) eine affine Ebene der Ordnung $n < \infty$. Dann hat (P, \mathcal{G}) genau n^2 Punkte und $n^2 + n$ Geraden.

Beweis. Sei $P(g)$ eine Parallelschar. Dann liegen n Geraden in $P(g)$ und auf jeder dieser Geraden liegen n Punkte. Es gibt also insgesamt n^2 Punkte, weil alle Punkte der affinen Ebene auf einer Geraden in $P(g)$ liegen (Parallelenaxiom). Sei nun $P \in \mathcal{P}$ ein fester Punkt. Man zeigt leicht, dass durch P genau $n + 1$ Geraden gehen (Übung!). Außerdem geht von jeder Parallelschar genau eine Gerade durch P (Parallelenaxiom). Es gibt also $n + 1$ Parallelscharen und in jeder Parallelschar liegen n Geraden. Insgesamt sind das $n(n + 1) = n^2 + n$ Geraden.

Bemerkungen:

- (i) Es ist ein offenes Problem, welche natürlichen Zahlen n als Ordnungen von affinen Ebenen auftreten. Es ist nur bekannt, dass alle Primzahlpotenzen, d.h. $n = p^r$ mit p prim und $r \in \mathbb{N}$ auftreten. Es ist auch bekannt, dass keine affinen Ebenen der Ordnungen 6 und 10 existieren. Bereits für Ordnung 12 ist die Existenzfrage bis heute ungelöst.

- (ii) Das genannte Axiomensystem reicht bei weitem nicht aus, um "alle" Sätze der Geometrie herzuleiten; nicht einmal die Sätze von Desargues und Pappos folgen daraus (es gibt affine Ebenen wie die **Moulton-Ebene**, in der der Satz von Desargues nicht gilt!).
- (iii) Anwendungen in praktischen Problemen der Kombinatorik: Wie organisiert man ein faires Skatturnier für neun Teilnehmer? Mit viel Aufwand kann man alle 3-er-Kombinationen von Spielern gegeneinander antreten lassen; dann müssen insgesamt

$$\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$$

Runden gespielt werden. Wenn man es aber auch als fair betrachtet, dass jeder Spieler mit jedem anderen Spieler genau in einer Runde spielt, kann man affine Geometrie verwenden:

Spieler \longleftrightarrow Punkte einer affinen Ebene der Ordnung 3

Runden \longleftrightarrow Geraden in dieser Ebene.

Nach dem Verbindungsaxiom treten dann je zwei Spieler genau einmal gegeneinander an. Es müssen aber nur 12 Runden gespielt werden!

- (iv) Allgemeiner lösen die affinen Ebenen der Ordnung n das Problem, einen "2 - $(n^2, n, 1)$ -Blockplan" zu konstruieren, d.h. eine Menge \mathcal{P} mit n^2 Elementen (hier die Punktmenge der affinen Ebene), dazu eine Menge \mathcal{B} von "Blöcken" (= Untermenge von \mathcal{P}) g mit jeweils n Elementen (hier die Geraden, also $\mathcal{B} = \mathcal{G}$), so dass zu je 2 verschiedenen $P, Q \in \mathcal{P}$ genau ein $g \in \mathcal{B}$ existiert mit $P, Q \in g$. Solche Blockpläne gibt es keineswegs immer! Z.B. gibt es keinen 2 - $(36, 6, 1)$ -Blockplan, was aber schwer zu beweisen ist!

Wir führen nun eine Geometrie ein, in der es keine Parallelen gibt, d.h. bei der sich zwei Geraden immer schneiden.

Definition 5. $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ heißt **projektive Ebene**, falls folgende Axiome erfüllt sind.

- (i) Zu je zwei $P \neq Q \in \mathcal{P}$ gibt es genau eine Verbindungsgerade $g \in \mathcal{G}$ mit $P \in g, Q \in g$.
- (ii) Zu je zwei Geraden $g \neq h \in \mathcal{G}$ existiert genau ein Schnittpunkt $P \in g \cap h$.
- (iii) Das Reichhaltigkeitsaxiom wie in der affinen Ebene ist gültig.

Beispiele:

- (i) Eine Kugel S , wo je zwei gegenüberliegende Punkte als ein Punkt aufgefasst werden, d.h.

$$\mathcal{P} = \{(P, Q) | P, Q \in S; \quad P, Q \text{ liegen gegenüber}\}$$

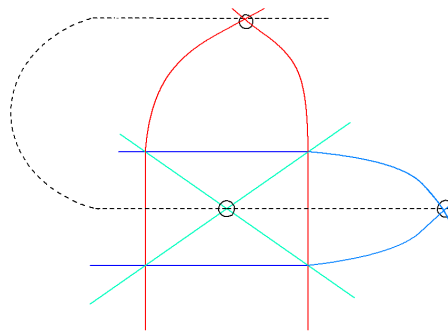
$$\mathcal{G} = \{\text{Großkreise}\}$$

Wir haben in Kapitel 3 gesehen, dass zwischen zwei verschiedenen (nicht gegenüberliegenden) Punkten genau ein Großkreis existiert. Weiterhin wissen wir, dass zwei verschiedenen Großkreise sich genau in zwei gegenüberliegenden Punkten schneiden, also in einem Element in \mathcal{P} . Das Reichhaltigkeitsaxiom ist auch erfüllt (wähle vier Punkte auf einer Halbkugel, von denen je drei auf einem Großkreis liegen). Es sind also alle Axiome einer projektiven Geometrie erfüllt.

- (ii) Man macht aus der affinen "Minimalebene" eine projektive "Minimalebene", indem man zu jeder Parallelschar einen Schnittpunkt hinzunimmt. Die neuen Punkte werden mit \circ gekennzeichnet (vgl. Abbildung 6.5).

Eine neue Gerade $- - - - -$ wird ebenso benötigt, damit auch für die neuen Punkte Axiom 1 erfüllt ist. Somit hat die Ebene jetzt 7 Punkte und 7 Geraden und ist projektiv. Dies ist das kleinste Beispiel, weil nach dem Reichhaltigkeitsaxiom vier Punkte wie im affinen Minimalbeispiel existieren müssen.

Abbildung 6.5:



- (iii) Wie kann man allgemein aus einer affinen Ebene eine projektive Ebene machen? Sei $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine affine Ebene. Wir wissen, dass \mathcal{G} Vereinigung von Parallelscharen ist. Für jede Parallelschar π fügt man einen neuen Punkt P_π hinzu, d.h.

$$\mathcal{P}' := \mathcal{P} \cup \{P_\pi \mid \pi \text{ Parallelschar in } (\mathcal{P}, \mathcal{G})\}$$

Jeder neue Punkt P_π wird zu jeder Geraden g in der Parallelenschar π hinzugefügt. Weiterhin wird eine neue Gerade hinzugefügt, die alle neuen Punkte P_π enthält, (vgl. Abbildung 6.6), d.h. setze

$$\mathcal{G}' := \bigcup_{\pi} \{g \cup \{P_\pi\} \mid g \in \pi\} \cup \left\{ \underbrace{\{P_\pi\}_\pi}_{=:u} \right\}$$

Die Punkte P_π heißen **Punkte im Unendlichen** und die Gerade u heißt **unendliche Gerade**. Wir zeigen jetzt, dass $(\mathcal{P}', \mathcal{G}')$ die Axiome einer projektiven Geometrie erfüllen.

1. ist klar für $P \neq Q$ in ursprünglicher Punktmenge \mathcal{P} . Für $P \in \mathcal{P}$ und $Q = P_\pi$ gibt es genau eine Gerade g in der Parallelenschar π , die durch P geht. Daher ist $g \cup \{P_\pi\}$ die eindeutige Gerade durch P und P_π . Für zwei beliebige Punkte im Unendlichen ist u die einzige Gerade, die die beiden Punkte verbindet.
2. stimmt, weil zwei ursprüngliche Geraden jetzt einen Schnittpunkt haben und jede ursprüngliche Gerade u in genau einem Punkt schneidet.
3. ist ohnehin erfüllt, weil in der affinen Ebene erfüllt.

Man nennt $(\mathcal{P}', \mathcal{G}')$ auch **projektiven Abschluss von $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$** . Wenn $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine affine Ebene der endlichen Ordnung n war, dann hat $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ genau n^2 Punkte und $n + 1$ Parallelenscharen. Folglich hat der projektive Abschluß $n^2 + n + 1$ Punkte und $n^2 + n + 1$ Geraden. Auf jeder Geraden liegen $n + 1$ Punkte.

Beispiel Die affine Ebene der Ordnung 3 wird zu einer projektiven Ebene mit $3^2 + 3 + 1 = 13$ Punkten und 13 Geraden. Jede Gerade hat 4 Punkte.

Anwendung Organisation eines Doppelkopfturniers mit 13 Spielern. Doppelkopf wird in Runden zu 4 Spielern gespielt.

$$\begin{aligned} \text{Punkte} &\longleftrightarrow \text{Spieler} \\ \text{Geraden} &\longleftrightarrow \text{Doppelkopfrunden} \end{aligned}$$

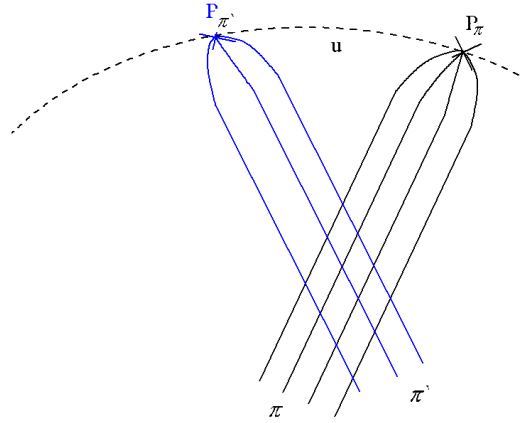
Nach Axiom i) treffen je zwei Spieler in genau einer Runde aufeinander. Es kann also ein genau 13-rundiges Turnier organisiert werden.

Satz 21. Sei $\mathbb{P} = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine projektive Ebene und $u \in \mathcal{G}$ eine beliebige Gerade. Entfernt man u und alle Punkte auf u , so entsteht eine affine Ebene. Formal formuliert, bedeutet dies, dass $(\mathcal{P}', \mathcal{G}')$ mit

$$\begin{aligned} \mathcal{P}' &:= \mathcal{P} \setminus u \\ \mathcal{G}' &:= \{g \setminus u \mid g \in \mathcal{G} \setminus \{u\}\} \end{aligned}$$

eine affine Ebene ist. Außerdem ist $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ der projektive Abschluss dieser Ebene.

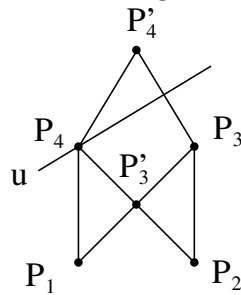
Abbildung 6.6:



Beweis. Wir überprüfen die Axiome für $(\mathcal{P}', \mathcal{G}')$

- (i) Seien $P \neq Q \in \mathcal{P}'$. Es gibt genau eine Gerade $g \in \mathcal{G}$ mit $P, Q \in g$. Daher ist $g \setminus u$ die einzige Gerade in \mathcal{G}' , die P mit Q verbindet.
- (ii) Sei $g \setminus u$ eine Gerade in \mathcal{G}' und $P \in \mathcal{P}'$. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $P \notin g \setminus u$, denn sonst ist $g \setminus u$ die eindeutige Parallele durch P . Sei $Q := g \cap u$ der Schnittpunkt von g und u in \mathbb{P} . Eine Gerade h durch P ist in $(\mathcal{P}', \mathcal{G}')$ parallel zu g genau dann, wenn der eindeutige Schnittpunkt von h und g in u liegt (sonst gibt es einen Schnittpunkt in $(\mathcal{P}', \mathcal{P}')$), d.h. wenn $h \cap g = \{Q\}$. Das ist nach Axiom 1. nur für genau eine Gerade h erfüllt.
- (iii) Seien $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathcal{P}$, so dass je drei von diesen Punkten auf keiner Geraden liegen. Falls die vier Punkte alle nicht in u liegen, erfüllen diese Punkte das Reichhaltigkeitsaxiom für $(\mathcal{P}', \mathcal{G}')$. Andernfalls liegen maximal zwei dieser Punkte auf u . Wir können also annehmen, dass $P_1, P_2 \notin u, P_4 \in u$ und P_3 kann, muss aber nicht auf u liegen. Wir definieren $P'_4 := P_1P_4 \cap P_2P_3$. Dann gilt wegen $P_1 \notin u, P_4 \in u$ und $P_4 \notin P_2P_3$, dass $P'_4 \notin u$ (vgl. Abbildung 6.7). Darüber hinaus definieren wir $P'_3 := P_2P_3 \cap P_2P_4$ wegen $P_2 \notin u, P_4 \in u$ und $P_u \notin P_1P_3$ gilt dann $P'_3 \notin u$. Dann erfüllen P_1, P_2, P'_3, P'_4 das Reichhaltigkeitsaxiom für $(\mathcal{P}', \mathcal{G}')$. Dazu muss noch überprüft werden, dass keine drei Punkte auf einer Geraden liegen. Falls z.B. P_1, P'_2, P'_4 auf einer Geraden liegen würden, dann wäre dies einerseits die eindeutige Gerade von P_1 nach P'_4 , was $P_4 \in g$ impliziert, und andererseits die

Abbildung 6.7:



eindeutige Gerade von P_1 und P'_3 , was $P_3 \in g$ impliziert. Also $P_1, P_3, P_4 \in g$ im Widerspruch zur Annahme. Also ist $(\mathcal{P}', \mathcal{G}')$ eine affine Ebene. Schließlich gilt:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Parallelenscharen von } (\mathcal{P}', \mathcal{G}') & \xleftrightarrow{1:1} \text{ Punkte auf } u \\
 \text{Parallelenschar von } g \setminus u & \mapsto g \cap u \\
 \text{Geraden } g \setminus u \text{ mit } g \cap u = Q & \longleftarrow Q
 \end{array}$$

Deswegen ist der projektive Abschluss von $(\mathcal{P}', \mathcal{G}')$ genau $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$

□

Folgerung 1. Für jede endliche projektive Ebene \mathbb{P} gibt es ein eindeutiges $n \in \mathbb{N}$, so dass \mathbb{P} genau $n^2 + n + 1$ Punkte und $n^2 - n + 1$ Geraden hat und auf jeder Geraden $n + 1$ Punkte liegen.

Definition 6. Die Zahl n heißt **Ordnung** von \mathbb{P} .

Dualitätsprinzip in projektiven Ebenen Jede Aussage über Punkte und Geraden in einer projektiven Ebene kann man in eine „duale Aussage“ über Geraden und Punkte übersetzen:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Punkte} & \longleftrightarrow \text{Geraden} \\
 \text{Geraden} & \longleftrightarrow \text{Punkte}
 \end{array}$$

Beispiel

- Zwei Geraden haben genau einen Schnittpunkt \longleftrightarrow Durch zwei Punkte geht genau eine Gerade
- Drei Geraden gehen durch einen Punkt \longleftrightarrow Drei Punkte liegen auf einer Geraden

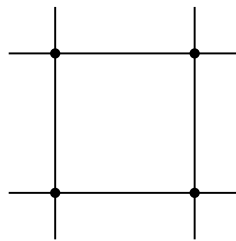
Satz 22 (Dualitätsprinzip in projektiven Ebenen). *Zu jeder Aussage über projektive Ebenen, die aus den Axiomen hergeleitet werden kann, gibt es eine duale Aussage, die ebenfalls aus den Axiomen hergeleitet werden kann. Dabei müssen folgende Ersetzungen vorgenommen werden*

<i>Punkte</i>	\longmapsto	<i>Geraden</i>
<i>Geraden</i>	\longmapsto	<i>Punkte</i>
<i>Schnittpunkt</i>	\longmapsto	<i>Verbindungsgerade</i>
<i>Verbindungsgerade</i>	\longmapsto	<i>Schnittpunkt</i>

Beweis. Die Axiome 1. und 2. sind dual zueinander. Das Axiom 3. ist zu sich selbst dual, denn:

Es gibt vier Punkte , von denen keine drei auf einer Geraden liegen

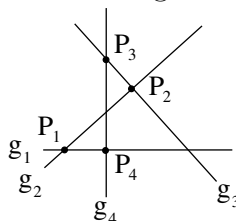
Abbildung 6.8:



- „ \Rightarrow “ Es seien vier Punkte gegeben, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Von den Geraden aus Abbildung 6.8 gehen keine drei durch einen Punkt.
- \Leftrightarrow Es gibt vier Geraden von denen keine drei durch einen Punkt gehen.
- „ \Leftarrow “ Es seien vier Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 gegeben, von denen keine drei durch einen Punkt gehen. Dann definiere $P_1 := g_1 \cap g_2, P_2 := g_2 \cap g_3, P_3 := g_3 \cap g_4,$ und $P_4 := g_4 \cap g_1$ (vgl. Abbildung 6.9).

Dann liegen von diesen Punkten keine drei auf einer Geraden.

Abbildung 6.9:



Bemerkung: Auch endliche projektive Ebenen liefern Blockpläne, nämlich $2 - (n^2 + n + 1, n + 1, 1)$ -Blockpläne, weil \mathbb{P} insgesamt $n^2 + n + 1$ Punkte enthält, alle Blöcke (=Geraden) $n + 1$ Punkte enthalten, und weil zu je zwei $P \neq Q$ genau ein Block(=Gerade g) existiert, die beide enthält. $n = 2$ gibt den Plan für ein Skat-Turnier mit 7 Teilnehmern und 7 Runden, denn in endlichen projektiven Ebenen ist auch die Anzahl der Geraden = $n^2 + n + 1$.

Kapitel 7

Reelle projektive Geometrie

Was passiert, wenn man als \mathbb{A} den \mathbb{R}^2 wählt und zur projektiven Ebene \mathbb{P} erweitert? Parallelen Geraden muss also ein gemeinsamer Punkt hinzugefügt werden. Parallele Geraden werden in der x_1, x_2 -Ebene beschrieben durch Gleichungen

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + c &= 0 & (g) \\ ax_1 + bx_2 + c' &= 0 & (h) \end{aligned}$$

Wir wenden nun folgenden Trick an: Betrachte \mathbb{A} als die Ebene $x_3 = 1$ im \mathbb{R}^3 . Sei E_g die Ebene durch 0 und g und E_h die Ebene durch 0 und h . Das heißt

$$\left. \begin{aligned} ax_1 + bx_2 + cx_3 &= 0 & (E_g) \\ ax_1 + bx_2 + c'x_3 &= 0 & (E_h) \end{aligned} \right\} \text{beides homogene lineare Gleichungen}$$

Nun haben E_g, E_h im \mathbb{R}^3 eine gemeinsame Schnittgerade l , gegeben durch $x_3 = 0$ (vgl. Abbildung 7.1) und $ax_1 + bx_2 = 0$. Diese Schnittgerade l wird ein neuer "unendlich ferner" Punkt auf g und h .

Man kann \mathbb{P} also auffassen als

$$\text{Punkte von } \mathbb{P} = \underbrace{\text{Punkte in } \{x_3 = 1\}}_{\text{Punkte in } \mathbb{A}} \quad u \quad \underbrace{\{\text{Geraden in } x_1x_2 \text{ Ebene durch den Ursprung}\}}_{\text{Parallelscharen in } \mathbb{A}}$$

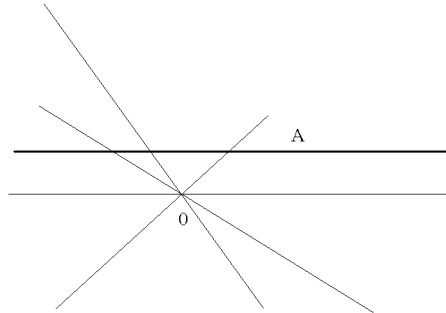
Beachte, dass es eine Bijektion

$$\begin{aligned} \text{Punkte in } \{x_3 = 1\} &\longleftrightarrow \{\text{Gerade durch Ursprung, die nicht in der } x_1x_2 \text{ - Ebene liegen}\} \\ P &\longleftrightarrow \text{Gerade durch } u \text{ und } P \end{aligned}$$

gibt und somit auch folgende Beschreibung von \mathbb{P} möglich ist.

$$\boxed{\text{Punkte von } \mathbb{P} = \{\text{Räumliche Gerade durch Ursprung}\}}$$

Abbildung 7.1:



Ebenso kann man die Geraden in \mathbb{P} beschreiben durch

Geraden von $\mathbb{P} = \{\text{Geraden von } \mathbb{A}\} \cup \{\text{unendlich ferne Gerade}\}$

und die Bijektion

$$\begin{aligned} \{\text{Geraden von } \mathbb{A}\} &= \{\text{Geraden in } x_3 = 0\} \longleftrightarrow \text{Ebene durch den Ursprung **ohne** } x_1x_2 \text{ - Ebene} \\ g &\longleftrightarrow \text{Ebene durch } u \text{ und } g \end{aligned}$$

ausnutzen um einzusehen, dass

$$\boxed{\text{Geraden von } \mathbb{P} = \{\text{Räumliche Ebenen durch Ursprung}\}}$$

Man sieht leicht ein, dass die Axiome einer projektivern Geometrie erfüllt sind. Man nennt \mathbb{P} auch **reelle projektive Ebene**.

Wir kommen nun zur Beschreibung von \mathbb{P} durch Koordinaten.

Definition 7. Auf \mathbb{R}_0^3 wird eine Äquivalenzrelation definiert durch

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) &\sim (y_1, y_2, y_3) :\Leftrightarrow \\ \exists r \in \mathbb{R}, r \neq 0 &\text{ mit } rx_i = y_i \text{ für } i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Die Äquivalenzklassen $[x] = [x_1, x_2, x_3]$ entsprechen den Geraden durch 0 (1-dimensionale Unterräume von \mathbb{R}^3) – aber ohne 0! – und sind die Punkte der projektiven Ebene $\mathbb{P} = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Geraden bestehen dann aus den Punkten $[x]$ mit $x \in$ Ebene E durch den Nullpunkt, d.h. sie entsprechen 2-dimensionalen Untervektorräumen des \mathbb{R}^2 . Entfernt man die Ebene $x_3 = 0$ (\longleftrightarrow projektive Gerade u) des \mathbb{R}^3 , hat man nur noch Punkte $[x] = [x_1, x_2, x_3]$ mit $x_3 \neq 0$. Aus diesen Äquivalenzklassen kann man immer einen Repräsentanten $\frac{1}{x_3}(x_1, x_2, x_3)$

auswählen, also ein $(x'_1, x'_2, 1)$. Man kann diese Punkte also als Punkte der affinen Ebene \mathbb{A} mit Koordinaten x'_1, x'_2 ansehen.

Wir verifizieren nun die Axiome der projektiven Geometrie: zwei Punkte $[x] \neq [y] \in \mathbb{P}$ entsprechen zwei Unterräumen

$\langle x \rangle, \langle y \rangle \subset \mathbb{R}^3$, die zusammen einen zweidimensionalen Unterraum $E = \langle x, y \rangle$ erzeugen, der in \mathbb{P} eine Gerade beschreibt. Entsprechend: Zwei verschiedene zweidimensionale Unterräume des \mathbb{R}^3 (\longleftrightarrow Geraden in \mathbb{P}), gegeben durch zwei homogene Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 &= 0; \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

haben als Schnitt einen eindimensionalen Unterraum (\longleftrightarrow Punkt des \mathbb{P}).

An dieser Situation kann man wieder die Dualität aus Satz ?? studieren: Die beiden Geraden lassen sich durch $[a_1, b_1, c_1]$ und $[a_2, b_2, c_2]$ beschreiben (auch hier kommt es auf gemeinsame Faktoren nicht an!), schneiden sich in einem Punkt $[x_1, x_2, x_3]$. Man kann die Gleichungen aber auch so lesen: Die durch $[x_1, x_2, x_3]$ gegebene Gerade, nämlich

$$\{[\xi_1, \xi_2, \xi_3] \in \mathbb{P} \mid x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 = 0\},$$

läuft durch die Punkte $[a_1, b_1, c_1]$ und $[a_2, b_2, c_2]$.

Die so verwendeten Koordinaten heißen **homogene Koordinaten** (bei denen es auf Multiplikation mit gemeinsamen Faktoren ungleich Null nicht ankommt).

Bei Festlegung der affinen Ebene $\mathbb{A} \subset \mathbb{P}$ heißen die hinzuzunehmenden Punkte $[x_1, x_2, 0]$ die **unendlich fernen Punkte**; sie bilden zusammen die **unendlich ferne Gerade** $x_3 = 0$.

Achtung: Man kann jede projektive Gerade $u \subset \mathbb{P}$ zur unendlich fernen Gerade machen, denn $\mathbb{P} \setminus u$ ist immer eine affine Ebene.

Satz 23. *Der Übergang zwischen zwei affinen Ebenen $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2 \subset \mathbb{P}$ wird geometrisch durch eine Zentralprojektion beschrieben (in Koordinaten durch eine **gebrochen-lineare Abbildung**).*

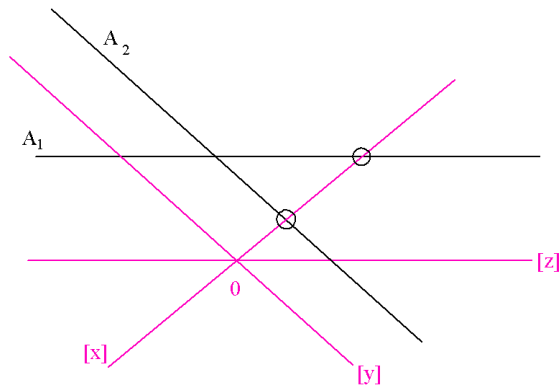
Beweis. Seien \mathbb{A}_2 in \mathbb{P} realisiert durch $x_3 = 0$ und \mathbb{A}_1 z.B. durch $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$, a und b nicht beide gleich Null (im Bild 7.2 beide von der Seite als Geraden gezeichnet).

Die Zentralprojektion von \mathbb{A}_1 auf \mathbb{A}_2 mit Zentrum 0 vermittelt eine wohldefinierte Punktabbildung

$$\mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2 : [x] \longmapsto [x]$$

mit Ausnahme von zwei Fällen: wenn $[z]$ unendlich ferner Punkt für \mathbb{A}_2 ist (kein Bild in \mathbb{A}_2) oder wenn $[y]$ unendlich ferner Punkt für \mathbb{A}_1 ist (kein Urbild, vgl. Zeichnung (BILD 7)). \square

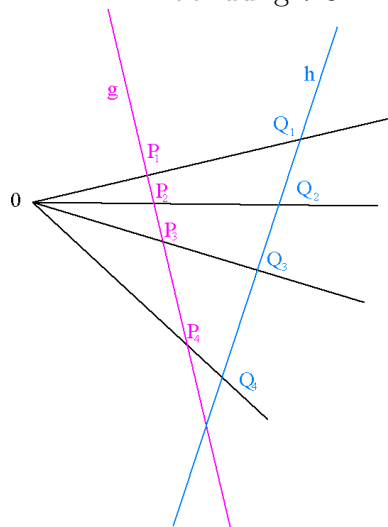
Abbildung 7.2:



Satz 24. Bei einer Zentralprojektion $\mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ werden Geraden auf Geraden abgebildet (Ausnahme: wenn die unendlich ferne Gerade im Spiel ist!) und auf den abgebildeten Geraden bleibt das **Doppelverhältnis** der Abstände zwischen vier Punkten erhalten, d.h. also (vgl. Abbildung 7.3):

$$\frac{|P_1P_3|}{|P_1P_4|} : \frac{|P_2P_3|}{|P_2P_4|} = \frac{|Q_1Q_3|}{|Q_1Q_4|} : \frac{|Q_2Q_3|}{|Q_2Q_4|}$$

Abbildung 7.3:

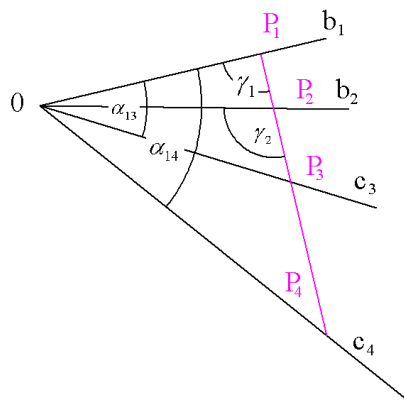


Beweis. Wenn das Projektionszentrum 0 ins Unendliche rückt, wird die Zentralprojektion zu einer Parallelprojektion. Wenn nicht, argumentiert man mit dem Sinussatz 1.2 (vgl. Abbildung 7.4):

$$\left. \begin{aligned} |\overline{P_1P_3}| &= \frac{c_3}{\sin \gamma_1} \sin \alpha_{13} \\ |\overline{P_1P_4}| &= \frac{c_4}{\sin \gamma_1} \sin \alpha_{14} \end{aligned} \right\} \text{ und ganz entsprechend für } |\overline{P_2P_3}|, |\overline{P_2P_4}|,$$

D.h. die linke Seite im Doppelverhältnis wird zu $\frac{\sin \alpha_{13}}{\sin \alpha_{14}} : \frac{\sin \alpha_{23}}{\sin \alpha_{24}}$, hängt überhaupt nicht

Abbildung 7.4:



mehr von der Lage von g ab, bleibt darum auch für die Q_i gleich!

□

Satz 25. *Ellipse, Hyperbel und Parabel gehen durch Zentralprojektion auseinander hervor (vgl. Abbildung 7.5).*

Abbildung 7.5:

