Prof. Dr. Jan Bruinier, Stephan Ehlen, Dr. Patrik Hubschmid

Forschungsseminar Darmstadt-Frankfurt WS 2013/14

Die BSD-Vermutung und die Gross-Zagier-Formel

24.10.2013, Darmstadt

1. Einführung

- Formulierung und Motivation der BSD-Vermutung
- Zusammenfassung der bekannten Resultate: Gross-Zagier-Formel, Satz von Kolyvagin, Modularitätssatz, Resultate von Bhargava und Shankar

2. Elliptische Kurven

- Definition, Weierstraß-Gleichung, j-Invariante und Klassifikation
- Elliptische Kurven über $\mathbb{C}$: Realisierung als komplexer Torus via Weierstraß $\wp$-Funktion, grober Modulraum $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{H}$
- Beweisskizze des Satzes von Mordell-Weil: Reduktion auf den schwachen Satz von Mordell-Weil mit Hilfe von Höhenfunktionen, Beweis des schwachen Satzes von Mordell-Weil über Endlichkeit der n-Selmergruppen
- L-Funktionen von elliptischen Kurven

Literatur: [Zha02, p. 4–14], [Dar04, §1.1, 1.2, 1.4]

7.11.2013, Frankfurt

3. Modulformen, Modulkurven

- Definition Modulformen
- Hecke-Operatoren auf $S_2(\Gamma_0(N))$
- Atkin-Lehner-Theorie, Neuformen
- L-Funktionen zu Spitzenformen
- Modulkurve $X_0(N)$ als Riemannsche Fläche, kanonisches Modell von $X_0(N)$ über $\mathbb{Q}$, Hecke-Korrespondenzen auf $X_0(N)$
- Eichler-Shimura-Theorie, modulare Parametrisierung von elliptischen Kurven über $\mathbb{Q}$ (Modularitätssatz)

Literatur: [Dar04, §2.1-2.5], [GZ86, §1.1-1.2], [Zha02, p. 16–17]

4. Heegner-Punkte

- Theorie der komplexen Multiplikation ([Dar04, §3.1], notwendige Resultate der globalen Klassenkörpertheorie wiederholen)
- Heegner-Punkte auf $X_0(N)$: Definition, Klassifikation und modulare Interpretation ([Dar04, §3.2], [GZ86, §2.1])
- Heegner-Hypothese, Heegner-Systeme

Literatur: [Dar04, §3.1-3.5], [GZ86, §II.1], [Zha02, p. 22–25], [Gro84]

21.11.2013, Frankfurt

5. Gross-Zagier-Formel und der Satz von Kolyvagin

- lokale und globale Höhenpaarung auf einer Kurve, Zusammenhang mit Néron-Tate-Höhen auf deren Jacobischen Varietät ([Gro86, §1-4])
- Formulierung der Gross-Zagier-Formel ([GZ86, §I.6]) und des Satzes von Kolyvagin ([Dar04, §3.8])
- Anwendung auf das Klassenzahlproblem von Gauß
- Kurze Skizze des Beweises der Gross-Zagier-Formel: Ausblick auf die kommenden Vorträge

Literatur: [Dar04, §3.7-3.8], [GZ86, §I.4-I.9], [Gro86, §1-4]

6. Berechnung der archimedischen lokalen Höhen

- Green-Funktionen für $X_0(N)$
- Auswertung der Green-Funktionen an Heegner-Punkten
- Formel für die archimedischen lokalen Höhen

Literatur: [GZ86, §II.2-II.5]

5.12.2013, Darmstadt

7. Berechnung der nicht-archimedischen lokalen Höhen I

- Modell $\underline{X}$ von $X_0(N)$ über $\mathbb{Z}$ mit modularer Interpretation der S-wertigen Punkte (grobes Modulschema), Unterschied zu feinem Modulschema erläutern
- Endomorphismenring der S-wertigen Punkte von $\underline{X}$, wobei $S = \mathrm{Spec}(R)$ für R ein vollständiger lokaler Ring mit algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper ([GZ86, §III.2])
- Ring der Witt-Vektoren W mit algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper wie in [GZ86, §III.4] einführen
- Interpretation der lokalen Höhenpaarung auf $X_0(N)$ als Schnittpaarung auf einem regulären Modell von $X_0(N)$ über dem Ring der ganzen Zahlen in einem lokalen Körper ([Gro86, §3])
- Schnittformel III.3.3 in [GZ86] folgern

Literatur: [GZ86, §III.1-III.3], [Gro86, §3]

8. Berechnung der nicht-archimedischen lokalen Höhen II

- Interpretation der lokalen Schnittpaarung von x und $T_m(x^\sigma)$ in der Schnittformel III.3.3 in [GZ86] als Kardinalität von Homomorphismengruppen zwischen elliptischen Kurven über vollständigen lokalen Ringen im Fall, dass die Divisoren von x und $T_m(x^\sigma)$ auf $X_0(N)$ disjunkt sind, mit Hilfe von Deformationstheorie ([Con04, Theorem 5.1])
- Berechnung der Kardinalität der in [Con04, Theorem 5.1] auftretenden Homomorphismengruppen mittels Studium von Ordnungen in Quaternionenalgebren: Nur Resultat vorstellen ([Con04, §7]).
- Anpassungen im Fall, dass x und $T_m(x^\sigma)$ nicht disjunkt sind, kurz erläutern ([Con04, §8] bzw. [GZ86, §III.8])
- Summenformeln in [GZ86, §III.9] vorstellen (ohne Beweis)

Literatur: [Con04], [GZ86, §III.4-III.9]

16.1.2013, Frankfurt

9. Rankin L-Reihen I

- Definition von Rankin L-Reihen $L_{\mathcal{A}}(f,s)$ assoziiert zu einer Idealklasse $\mathcal{A}$ eines imaginär-quadratischen Zahlkörpers und einer Neuform $f \in S_2(\Gamma_0(N))$ (im Seminar nur Gewicht 2 behandeln)
- Rankin L-Reihen als Petersson-Skalarprodukt von f und eines Produkts einer Theta-Reihe mit einer nicht-holomorphen Eisenstein-Reihe ausdrücken ([GZ86, §IV.1])
- Aussage von Proposition IV.2.4 in [GZ86] (ohne Beweis)
- Fourier-Entwicklungen ([GZ86, §IV.3])

Literatur: [GZ86, §IV.1-IV.3]

10. Rankin L-Reihen II

- Funktionalgleichung für Rankin L-Reihen
- Formeln für $L_{\mathcal{A}}(f,1)$ und $L'_{\mathcal{A}}(f,1)$
- Modulform in den Formeln für $L_{\mathcal{A}}(f,1)$ und $L'_{\mathcal{A}}(f,1)$ durch eine Spitzenform ersetzen ([GZ86, §IV.6])

Literatur: [GZ86, §IV.4, IV.6]

23.1.2014, Darmstadt

11. Beweis der Gross-Zagier-Formel, Korollare und Anwendungen

- Folgerung der Gross-Zagier-Formel aus den zuvor bewiesenen Formeln für die lokalen Höhenpaarungen und die speziellen Werte der Ableitungen von Rankin L-Reihen ([GZ86, §V.1])
- Korollare aus der Gross-Zagier-Formel für das Verhalten der L-Reihen von Neuformen in $S_2(\Gamma_0(N))$ in $s = 1$ ([GZ86, §V.1])
- Folgerung der Formel für die Ableitung in $s = 1$ der L-Reihe über einem geeigneten imaginär-quadratischen Zahlkörper K einer elliptischen Kurve über $\mathbb{Q}$, Zusammenhang mit der BSD-Vermutung ([GZ86, §V.2])
- Korrektheit der BSD-Vermutung für elliptische Kurven über $\mathbb{Q}$ mit analytischem Rang 0 und 1 ([Dar04, Theorem 3.22], Formulierung des Satzes von Kolyvagin aus Vortrag 5 in Erinnerung rufen)

Literatur: [GZ86, §V.1-V.2], [Dar04, §3.8-3.9], [Zha02, §5.3]

12. Ausblick: Verallgemeinerungen der Gross-Zagier-Formel

- Quaternionenalgebren, Shimura-Kurven, Heegner-Systeme (durch Shimura-Kurven parametrisiert), verallgemeinerte Gross-Zagier-Formel von Zhang ([Dar04, §4], [Zha97])
- Verallgemeinerung der Gross-Zagier-Formel auf spezielle Divisoren auf Shimura-Varietäten von orthogonalem Typ durch Bruinier und Yang ([BY09])

Literatur: [Dar04, §4], [Zha97], [BY09]

13. Durchschnittlicher Rang von elliptischen Kurven über $\mathbb{Q}$

- Durchschnittliche Kardinalität der 2- und 3-Selmergruppe einer elliptischen Kurve über $\mathbb{Q}$: Resultate vorstellen, Beweisidee des Resultats über die 2-Selmergruppe erläutern (2-Selmergruppe mit $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})$-Bahnen von binären Formen vierten Grades identifizieren)
- Folgerung: Durchschnittlicher Rang einer elliptischen Kurve über $\mathbb{Q}$ ist maximal 7/6.

Literatur: [Poo12], [BS10a], [BS10b]

14. Konsequenzen der Resultate von Bhargava und Shankar für die BSD-Vermutung

Erläuterung der folgenden Resultate:

- Ein positiver Anteil der elliptischen Kurven über $\mathbb{Q}$ hat Rang 0.
- Unter der Voraussetzung der Endlichkeit der Tate-Shafarevich-Gruppen: Ein positiver Anteil der elliptischen Kurven über $\mathbb{Q}$ hat Rang 1.
- Ein positiver Anteil der elliptischen Kurven über $\mathbb{Q}$ hat analytischen Rang 0 und erfüllt die BSD-Vermutung.

Literatur: [BS10b, §4]

Literatur

[BS10a] Manjul Bhargava and Arul Shankar. Binary quartic forms having bounded invariants, and the boundedness of the average rank of elliptic curves. *Preprint available on arXiv:1006.1002*, 2010.

[BS10b] Manjul Bhargava and Arul Shankar. Ternary cubic forms having bounded invariants, and the existence of a positive proportion of elliptic curves having rank 0. *Preprint available on arXiv:1007.0052*, 2010.

[BY09] Jan Hendrik Bruinier and Tonghai Yang. Faltings heights of CM cycles and derivatives of L-functions. *Invent. Math.*, 177(3):631–681, 2009.

[Con04] Brian Conrad. Gross-Zagier revisited. In *Heegner points and Rankin L-series*, volume 49 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 67–163. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004. With an appendix by W. R. Mann.

[Dar04] Henri Darmon. *Rational points on modular elliptic curves*, volume 101 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 2004.

[Gro84] Benedict H. Gross. Heegner points on $X_0(N)$. In *Modular forms (Durham, 1983)*, Ellis Horwood Ser. Math. Appl.: Statist. Oper. Res., pages 87–105. Horwood, Chichester, 1984.

[Gro86] Benedict H. Gross. Local heights on curves. In *Arithmetic geometry (Storrs, Conn., 1984)*, pages 327–339. Springer, New York, 1986.

[GZ86] Benedict H. Gross and Don B. Zagier. Heegner points and derivatives of L-series. *Invent. Math.*, 84(2):225–320, 1986.

[Poo12] Bjorn Poonen. Average rank of elliptic curves. *Séminaire Bourbaki*, 64ème année(1049), 2011–2012.

[Zha97] Shouwu Zhang. Heights of Heegner cycles and derivatives of L-series. *Invent. Math.*, 130(1):99–152, 1997.

[Zha02] Shou-Wu Zhang. Elliptic curves, L-functions, and CM-points. In *Current developments in mathematics, 2001*, pages 179–219. Int. Press, Somerville, MA, 2002.