Stetigkeit

Erklärung

Konvergenz von Funktionen

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir schreiben

$$\lim_{x \to a} f(x) = c,$$

wenn $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$ für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in D$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ und nennen dies den **Grenzwert** der Funktion f im Punkt a.

Erinnerung:
Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$.

Gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$ für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D, die von oben gegen a konvergieren, d.h. $x_n > a$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, so schreiben wir $\lim_{x\searrow a} f(x) = c$ und nennen dies den **rechtsseitigen Grenzwert**. Analog heißt $\lim_{x\nearrow a} f(x) = c$, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$ für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D, die von unten gegen a konvergieren, d.h. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ und $x_n < a$. Wir nennen dies den **linksseitigen Grenzwert.**

Erklärung

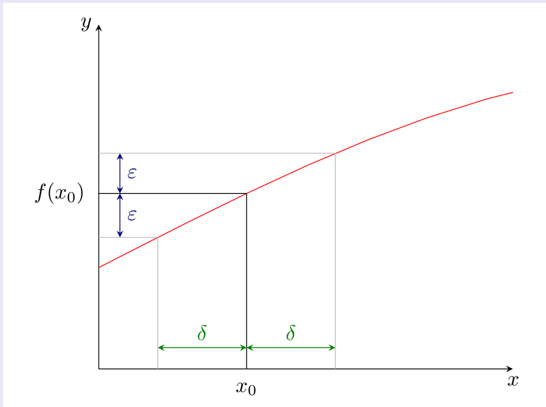
Definition von Stetigkeit

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, f ist im Punkt $x_0 \in D$ **stetig**, wenn eine der folgenden (äquivalenten) Bedingungen erfüllt ist:

(i) Der linksseitige und rechtsseitige Grenzwert von f in x_0 stimmen überein.

(ii) (*Folgenkriterium*)
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

(iii) (ε-δ-*Kriterium*) Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.



Hinweis

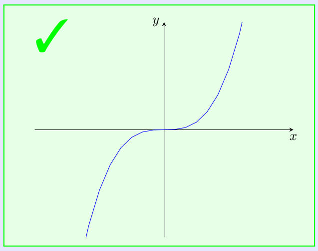
Stetigkeit ist eine lokale Eigenschaft, d.h. eine Eigenschaft, die von einem Punkt des Definitionsbereich erfüllt werden kann.

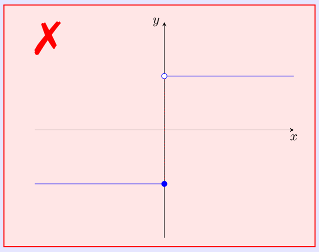
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **(punktweise) stetig**, wenn sie in allen Punkten $a \in D$ stetig ist.

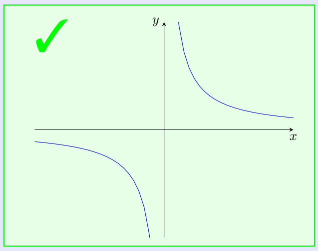
Bsp. 1

Bsp. 2

Bsp. 3







Erklärung

Eigenschaften stetiger Funktionen und gleichmäßige Stetigkeit

- *Summe, Differenz, Produkt und Quotient stetiger Funktionen sind wieder stetig, d.h.:*

  Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die in $x_0 \in D$ stetig sind und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann sind auch $f + g$, $\lambda \cdot f, f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig. Ist $g(x_0) \neq 0$, so ist auch $\frac{f}{g} : D' \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig, wobei man $D' := \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$ setzt.

- *Die Verkettung stetiger Funktionen ist stetig, d.h.:*

  Sind $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit $f(D) \subseteq E$ und ist f in $x_0 \in D$ und g in $y_0 = f(x_0)$ stetig, so ist $g \circ f$ in x_0 stetig.

ZWS

Satz.(Zwischenwertsatz)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < f(b)$. Dann existiert zu jedem $c \in [f(a), f(b)]$ ein $\xi \in [a, b]$ sodass $f(\xi) = c$.

Wir nennen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ **gleichmäßig stetig,** wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ gilt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Jede gleichmäßig stetige Funktion ist auch punktweise stetig. Es gilt ferner:

Erklärung

Satz. Eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall ist gleichmäßig stetig.

☺ – ☹

Aufgaben

Grenzwert von Funktionen

Lösung

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Grenzwerte der folgenden Funktionen:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} x - \sqrt{x^2+3x}$, (b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x+2}$, (c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$ für $x, a > 0$, (d) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Stetigkeit

Lösung

Aufgabe 2. Prüfen Sie, ob die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 = 0$ sind:

(a) $f(x) = c,$ für $c \in \mathbb{R}$ (b) $f(x) = x^2 + 2x + 1,$ (c) $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x > 0, \end{cases}$

(d) $f(x) = \sin(x)$ (e) $f(x) = |x|,$ (f) $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Lösung

Aufgabe 3. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit

$$f(x) = g(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{Q}.$$

Zeigen Sie, dass dann bereits $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Lösung

Aufgabe 4. Sei M eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Man zeige, dass die Funktion $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die definiert ist durch

$$d(x) := \inf\{|x-y| : y \in M\} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

stetig ist.

Eigenschaften stetiger Funktionen

Lösung

Aufgabe 5. Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass die Funktion

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$$

im Intervall $[2, 5]$ eine Nullstelle besitzt.

Lösung

Aufgabe 6. Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(a) > g(a)$ und $f(b) < g(b)$. Zeigen Sie, dass es einen Punkt $c \in (a, b)$ gibt mit $f(c) = g(c)$.

Lösung

Aufgabe 7.

(i) Man zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ gleichmäßig stetig ist, die Funktion $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ jedoch nicht.

(ii) Zeige, dass die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ auf dem Intervall $[1, 2]$ gleichmäßig stetig ist.