Matrixrechnung - Grundlagen

Erklärung

Was ist eine Matrix?

Eine $m \times n$-Matrix ist eine rechteckige Anordnung von Zahlen in m Zeilen und n Spalten.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,m} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Der Index i, j des Eintrags $a_{i,j}$ gibt die Position innerhalb der Matrix an. $a_{i,j}$ befindet sich sich in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte.

Anstelle von Zahlen können die Einträge einer Matrix auch andere Objekte sein.

Man schreibt oft: $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$.

- Die Zahlen $a_{i,j}$ heißen Einträge der Matrix.
- Die i-te Zeile hat die Form $A_{(i)} := (a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n})$.
- Die j-te Spalte hat die Form $A^{(j)} := \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix}$

Erklärung

Rechnen mit Matrizen

Erklärung

Zwei Matrizen der selben Größe $m \times n$ können mit einander addiert werden. Die Addition erfolgt eintragsweise: Die Matrix $A + B$ hat die Einträge $a_{i,j} + b_{i,j}$.
Beispiel (mit $m = 3$, $n = 2$):

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} \\ a_{3,1} + b_{3,1} & a_{3,2} + b_{3,2} \end{pmatrix}$$

Eine beliebige $m \times n$-Matrix kann mit einem Skalar multipliziert werden. Die Multiplikation erfolgt eintragsweise. Die Matrix $c \cdot A$ hat die Einträge $c \cdot a_{i,j}$.
Beispiel (mit $m = n = 2$):

$$c \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot a_{1,1} & c \cdot a_{1,2} \\ c \cdot a_{2,1} & c \cdot a_{2,2} \end{pmatrix}$$

Erklärung

Hinweis

Eine $m \times r$-Matrix kann mit einer $r \times n$-Matrix multipliziert werden. Es entsteht eine $m \times n$-Matrix. Die Matrix $A \cdot B$ hat an der Stelle i, j den Eintrag $\sum_{k=1}^{r} a_{i,k} b_{k,j}$. Dies entspricht dem gewöhnlichen Skalarprodukt der i-ten Zeile von A mit der j-ten Spalte von B, d.h. der i, j-te Eintrag ist $\langle A_{(i)}, B^{(j)} \rangle$.
Beispiel (mit $m = n = 2$, $r = 3$):

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} + a_{1,3}b_{3,1} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} + a_{1,3}b_{3,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} + a_{2,3}b_{3,1} & a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} + a_{2,3}b_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{3} a_{1,k}b_{k,1} & \sum_{k=1}^{3} a_{1,k}b_{k,2} \\ \sum_{k=1}^{3} a_{2,k}b_{k,1} & \sum_{k=1}^{3} a_{2,k}b_{k,2} \end{pmatrix}$$

Erklärung

Transponieren

Beim Transponieren einer Matrix werden Zeilenindex und Spaltenindex mit einander vertauscht.
Hat die Matrix A an der Stelle i, j den Eintrag $a_{i,j}$, so hat die transponierte Matrix A^T hat an der Stelle j, i den Eintrag $a_{i,j}$.
Aus einer $m \times n$-Matrix wird so eine $n \times m$-Matrix.

Das Transponieren entspricht einer Spiegelung an der Hauptdiagonalen. Das ist die gedachte Diagonale, die von links oben von $a_{1,1}$ durch $a_{2,2}$ bis $a_{m,m}$ verläuft.

$$\text{Aus } A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,m} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \text{ wird } A^T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,m} & a_{2,m} & \cdots & a_{m,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Erklärung

Besondere Matrizen

Anhand ihrer Gestalt und der Stuktur der Einträge unterscheidet man verschiedene Typen von Matrizen. Gilt $m = n$, so heißt die Matrix *quadratisch*. Die folgenden Matrizen sind quadratisch.

Die Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{m,m} \end{pmatrix}$$

Die Einheitsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die obere Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{m,m} \end{pmatrix}$$

Und natürlich viele weitere mehr...

Aufgaben

Rechnen mit Matrizen

Lösung

Aufgabe 1. Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1,2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ C = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \ , D = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \ , \ E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie sofern möglich die folgenden Ausdrücke:

a) $A + A$ b) $A - B$ c) $B + 2 \cdot A$ d) $A + C$ e) $A - (B + C)$
f) $D + D$ g) $C + D$ h) $A + E$ i) $-2 \cdot E$

Lösung

Aufgabe 2. Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \ , D = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \ , \ E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie sofern möglich die folgenden Produkte:

a) $A \cdot A$ b) $A \cdot B$ c) $A \cdot C$ d) $C \cdot A$ e) $C \cdot D$ f) $D \cdot C$
g) $A \cdot E$ h) $E \cdot A$

Transponieren

Lösung

Aufgabe 3. Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ \pi & 2 & 1 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \ , \ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 0 \end{pmatrix} \ , D = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \ , \ E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie zu diesen Matrizen jeweils die transponierte Matrix.

Lösung

Aufgabe 4. Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie $(A \cdot B)^T$, $A^T \cdot B^T$ und $B^T \cdot A^T$.

Besondere Matrizen

Lösung

Aufgabe 5. Beweisen Sie: Das Produkt zweier oberen Dreiecksmatrizen ist eine obere Dreiecksmatrix.

Lösung

Aufgabe 6. Beweisen Sie:

1. Das Produkt zweier Diagonalmatrizen ist eine Diagonalmatrix.
2. Das Produkt zweier Diagonalmatrizen ist kommutativ.

Geben Sie zwei Matrizen A und B an, sodass $A \cdot B \neq B \cdot A$.