# Folgen II

Erklärung

## Teilfolgen von Folgen

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge mit $n_k \in \mathbb{N}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dann heißt die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, so ist $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots$ eine Teilfolge von $(a_n)$, wenn $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$.

Erklärung

## Häufungspunkte

Ein Wert $a$ heißt Häufungspunkt einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ und für alle $N \in \mathbb{N}$ ein $n \geq N$ existiert, sodass

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Eine Folge kann mehrere Häufungspunkte haben. Wenn sie beschränkt ist und genau einen Häufungspunkt besitzt, dann ist dieser ihr Grenzwert.

Hinweis

Jeder Grenzwert ist ein Häufungspunkt. Aber nicht jeder Häufungspunkt ist ein Grenzwert.

**„Häufungspunkt“ in anderen Worten:**
$a$ heißt Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn gilt:

- In jeder $\varepsilon$-Umgebung $U_\epsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$ um $a$ liegen unendlich viele Folgenglieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Es gibt eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ für $k \to \infty$ gegen $a$ konvergiert.

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$ hat die zwei Häufungspunkte 1 und $-1$.
Die zugehörigen Teilfolgen sind $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$.

Zu einem Häufungspunkt liegen unendlich viele Folgenglieder in einer $\varepsilon$-Umgebung, jedoch nicht zwingend alle bis auf endlich viele. Es können also auch unendlich viele Folgenglieder außerhalb der $\varepsilon$-Umgebung liegen.

Erklärung

## Satz von Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge besitzt (mindestens) eine konvergente Teilfolge.

In anderen Worten:

- Jede beschränkte Folge besitzt (mindestens) einen Häufungspunkt.
- Jede beschränkte Folge besitzt einen größten und einen kleinsten Häufungspunkt.

Es gibt auch unbeschränkte Folgen mit mindestens einem Häufungspunkt.

Erklärung

Erklärung

## Limes superior und Limes inferior

Der größte Häufungspunkt einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Limes superior und der kleinste Häufungspunkt heißt Limes inferior.
Schreibweise: $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so gilt für alle $\varepsilon > 0$ für alle bis auf endlich viele Folgenglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n - \varepsilon < a_n < \limsup_{n\to\infty} a_n + \varepsilon.$$

☺ – ☹

# Aufgaben

## Teilfolgen

Lösung

**Aufgabe 1.** Bestimmen Sie von diesen Folgen jeweils die ersten 10 Folgenglieder der angegebenen Teilfolgen:

a) von $a_n = \frac{1}{n} - 1$ die Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{4k})_{k\in\mathbb{N}}$,
b) von $a_n = (-1)^n(n+1)^2$, die Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$,
c) von $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$, die Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{4k+1})_{k\in\mathbb{N}}$.
d) $a_n = 3\cdot\left[\frac{n}{3}\right]$, die Teilfolgen $(a_{3k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3k+2})_{k\in\mathbb{N}}$, wobei $[\cdot]:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ die Rundungsfunktion bezeichnet, also z.B. $[2,6] = 3$ und $[-1,9] = -2$.

## Häufungspunkte

Lösung

**Aufgabe 2.** Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der folgenden Folgen:

a) $a_n = (-1)^{3n}$ b) $a_n = (-1)^n(1-\frac{1}{n})$ c) $a_n = (-\frac{1}{n})^n$
d) $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ e) $a_n = \sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right)$ f) $a_n = \sin(n)$

Lösung

**Aufgabe 3.** a) Geben Sie eine unbeschränkte Folge mit mindestens einem Häufungspunkt an.

b) Geben Sie eine unbeschränkte Folge an, die unendlich viele Häufungspunkte besitzt.

c) Geben Sie eine beschränkte Folge an, die unendlich viele Häufungspunkte besitzt.

d) Geben sie eine unbeschränkte Folge an, die keinen Häufungspunkt besitzt. Kann es auch beschränkte Folgen ohne Häufungspunkt geben?

Lösung

**Aufgabe 4.** Zeigen Sie: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen einen Grenzwert $a$, wenn jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $a$ konvergiert.

Lösung

**Aufgabe 5.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit unendlich vielen Häufungspunkten. Es sei $(h_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Häufungspunkten von $(a_n)$. Zeigen Sie: Ist $h$ ein Häufungspunkt von $(h_m)$, so ist $h$ auch ein Häufungspunkt von $(a_n)$.

## Limes superior und Limes inferior

Lösung

**Aufgabe 6.** Bestimmen Sie zu den Folgen aus Aufgabe 2 jeweils den Limes superior und den Limes inferior.

Lösung

**Aufgabe 7.** Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen.
a) Beweisen Sie

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

b) Geben Sie ein Beispiel an, bei dem obige Ungleichung mit Gleichheit erfüllt ist.

c) Geben Sie ein Beispiel an, bei dem obige Ungleichung nicht mit Gleichheit erfüllt ist.

Lösung

**Aufgabe 8.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Zeigen Sie:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = -\liminf_{n\to\infty}(-a_n)$$