Differentiation

Differenzierbarkeit und Ableitung

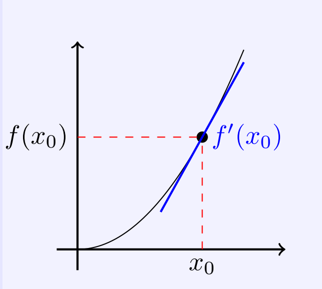
Es sei $D \subset \mathbb{R}, D$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Dann ist f im Punkt $x_0 \in D$ **differenzierbar**, wenn der folgende Grenzwert existiert:

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

In diesem Fall schreiben wir $f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

$f'(x_0)$ heißt **Ableitung** von f an der Stelle x_0. f heißt in D **differenzierbar**, falls f in allen Punkten aus D differenzierbar ist.

Aus Differenzierbarkeit folgt Stetigkeit!



$f'(x_0)$ ist die Steigung der Tangente an den Graphen von f in der Stelle x_0.

Ableitungsregeln

Seien $D \subset \mathbb{R}$ offene Mengen und $f, g : D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ differenzierbare Funktionen. Dann sind die Funktionen $f \pm g$, $f \cdot g$ und mit $g(x_0) \neq 0$ auch $\frac{f}{g}$ im Punkt x_0 differenzierbar und es gelten die folgenden **Ableitungsregeln**:

1. **Summenregel:** $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
2. **Produktregel:** $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
3. **Quotientenregel:** $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$
4. **Kettenregel:** $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$, wenn Verkettung $g \circ f$ definiert.

Höhere Ableitungen

Wenn die Ableitung $f' : D \to \mathbb{R}$ von f in $x_0 \in D$ differenzierbar ist, so heißt die Ableitung von f' die **zweite Ableitung** von f im Punkt $x_0 \in D$ mit:

$$f''(x_0) = f^{(2)}(x_0) := \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) = \frac{d}{dx}\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f('x_0)}{x - x_0}.$$

Die **k-te Ableitung** ist gegeben durch:

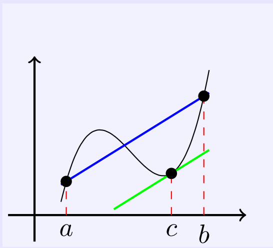
$$f^{(k)}(x_0) := \frac{d^k f}{dx^k}(x_0) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{(k-1)} f}{dx^{(k-1)}}(x_0)\right).$$

Mittelwertsatz

Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Dann existiert mindestens ein $c \in (a, b)$ mit

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Die Sekantensteigung durch die Stellen a und b entspricht der Tangentensteigung an der Stelle c.



Die Regeln von de l'Hospital

Seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ und f, g zwei differenzierbare Funktionen. Es sei weiterhin $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$ und es existiere der Limes $\lim_{x \nearrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: c \in \mathbb{R}$. Dann folgt $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = c$, falls

1. $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ oder 2. $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$.

Taylor-Reihe und Taylorpolynom

Sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Die **Taylor-Reihe** von f mit Entwicklungspunkt x_0 ist gegeben durch $T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$.

$T_f^n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ ist das Taylorpolynom n-ten Grades von f mit Entwicklungspunkt x_0.

Aufgaben

Differenzierbarkeit und Ableitung

Lösung

Aufgabe 1. Berechne mithilfe des Differenzenquotienten die ersten Ableitungen der Funktionen.

a) $f(x) = 2x + 3$ b) $g(x) = c \cdot x + b \ (b, c \in \mathbb{R})$ c) $h(x) = x^2$
d) $i(x) = x^4 - 16$ e) $j(x) = x^n$ f) $k(x) = \frac{1}{x}$
g) $l(x) = \frac{1}{x^n}$ h) $m(x) = \sqrt{x}$ i) $n(x) = \sqrt{x^3}$

Ableitungsregeln

Lösung

Aufgabe 2. Berechne unter Anwendung der Ableitungsregeln jeweils die erste Ableitung der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = 3x \cdot \sin(x)$ b) $g(x) = \frac{\sin(3x^2)}{\sqrt{4x^2}}$ c) $h(x) = x \cdot \ln(x)$
d) $i(x) = \frac{6x^3 - 4x + 1}{15x^4 + 7x}$ e) $j(x) = \tan(x)$ f) $k(x) = \sin(\ln(x)) \cdot x^2$
g) $l(x) = (x + 2)^3 \cdot \cos(x - 1)$ h) $m(x) = \cos^4(\pi - x)$ i) $n(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\cos(2x) \cdot \sin(4x^2)}$

Höhere Ableitungen

Lösung

Aufgabe 3. Bestimme die erste bis dritte Ableitung der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = 16x^{15} + 14x$ b) $g(x) = (x - 2)^5$ c) $h(x) = \ln(x + 1)$
d) $i(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$ e) $j(x) = e^x \cdot 3x$

Mittelwertsatz

Lösung

Aufgabe 4. Beweise mithilfe des Mittelwertsatzes den Satz von Rolle:

Es sei $f[a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Gilt $f(a) = f(b)$, dann existiert ein $c \in (a, b)$ mit $f'(c) = 0$.

Lösung

Aufgabe 5. Beweise die folgende Ungleichungen mithilfe des Mittelwertsatzes.

$$|\cos(e^x) - \cos(e^y)| \leq |x - y| \quad \text{für} \quad x, y \leq 0.$$

Die Regeln von de l'Hospital

Lösung

Aufgabe 6. Überprüfe, ob die Regel von l'Hospital angewendet werden darf und bilde gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{e^x}$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x^3}$ c) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^3}$
d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x}{x}$ e) $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin(x)}{x}$ f) $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

Taylorreihe

Lösung

Aufgabe 7. Stelle die folgenden Taylorpolynome auf.

a) 2. Grades von $f(x) = \sqrt{2x + 2}$ mit $x \geq -1$, mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 3$

b) 3. Grades von $f(x) = e^x \cdot \sin(x)$, mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$

c) 2. Grades von $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 1$

d) 2. Grades von $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$, mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 1$