Relationen und Funktionen

Vorsemesterkurs Informatik
Wintersemester 2023/24

Ronja Düffel

25. September 2023

Wie war das noch?

Mengen

- Zusammenfassen von wohlunterschiedenen Objekten zu einem Ganzen
- Reihenfolge der Elemente ist irrelevant
- Elemente können nicht *mehrfach* in einer Menge vorkommen

Beispiel

$$\begin{aligned} \mathit{Abendmenü} &:= \{\mathit{Fischsuppe}, \mathit{Wildschweinragout}, \mathit{Eis}\} \\ &= \{\mathit{Eis}, \mathit{Fischsuppe}, \mathit{Wildschweinragout}\} \\ &= \{\mathit{Eis}, \mathit{Fischsuppe}, \mathit{Eis}, \mathit{Wildschweinragout}, \mathit{Eis}\} \end{aligned}$$

Problem: Mengen erlauben uns nicht

- Reihenfolge festzulegen
- Mehrfaches Vorkommen zu beschreiben

Tupel

Definition (Tupel)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$.

1. Für n Objekte $a_1, \ldots, a_n$ bezeichnet $(a_1, \ldots, a_n)$ das **Tupel** mit Komponenten $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
2. a_i ist die *i*-**te Komponente** und die Zahl n heißt **Länge** des Tupels.
3. Tupel der Länge 2 nennen wir auch **geordnete Paare**, Tupel der Länge 3 **Tripel**, Tupel der Länge n kurz *n*-**Tupel**.
4. Zwei Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ und $(b_1, \ldots, b_m)$ sind **gleich**, falls $m = n$ ist und für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt: $a_i = b_i$.

Frage 17

Welche der folgenden Gleichungen ist falsch?

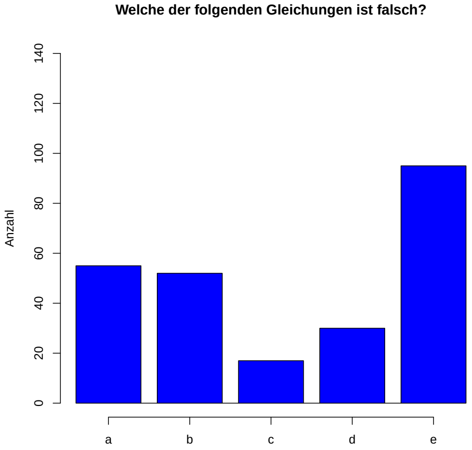
a) $\{(2,3)\} = \{(3,2)\}$

b) $(\{2,3\}) = (\{3,2\})$

c) $\{2,3\} = \{2,3,2\}$

d) $\{2,3\} = \{3,3,2\}$

Anmeldung


Welche der folgenden Gleichungen ist falsch?
Anzahl
0
20
40
60
80
100
120
140
a
b
c
d
e

Tupel vs Mengen

- Das leere Tupel () hat die Länge 0.
- Es ist $(1,2) \neq (1,2,1) \neq (1,2,2)$, aber $\{1,2,1\} = \{1,2,2\} = \{1,2\}$.
- (Anna, Peter) ist ein geordnetes Paar, {Anna, Peter} ist eine zweielementige Menge, manchmal auch *Paar* genannt.
- Es gilt $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ für beliebige Objekte $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Kartesisches Produkt

Definition (Kartesisches Produkt)

Das *kartesische Produkt* zweier Mengen A und B ist die Menge

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Beispiel:
Sei $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{x, y\}$. Dann ist das Kartesische Produkt:

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}$$

Kartesisches Produkt

Definition

Sei $k \in \mathbb{N}$ und seien $M_1, \ldots, M_k$ Mengen. Das kartesische Produkt von $M_1, \ldots, M_k$ ist die Menge

$$M_1 \times \cdots \times M_k := \{(m_1, \ldots, m_k) | m_1 \in M_1, \ldots, m_k \in M_k\}$$

Falls $M = M_1 = M_2 = \ldots = M_k$, so schreiben wir M^k anstelle von $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_k$.

Beispiel

Abendmenü

V := {Fischsuppe, Gemüsesuppe}, H := {Wildschweinragout, Pizza},

N := {Eis, Obstsalat}

Abendmenü := V × H × N

  mögl. Abendmenü: (Fischsuppe, Wildschweinragout, Eis)

Kindermenü := N × V × N × H × N

  mögl. Kindermenü: (Eis, Fischsuppe, Eis, Wildschweinragout, Eis)

Kartesisches Produkt (Beispiele)

- Das kartesische Produkt der Mengen $\{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$ und $\{A, K, D, B, 10, 9, 8, 7\}$ ist die Menge aller Karten in einem Skatblatt. $\{(\clubsuit, A), (\spadesuit, A), (\heartsuit, A), (\diamondsuit, A), \ldots, (\heartsuit, 7), (\diamondsuit, 7)\}$
- Die Menge aller Uhrzeiten im Format SS:MM ist $\{00, 01, \ldots, 23\} \times \{00, 01, \ldots, 59\}$.
- Die Menge aller dreigängigen Menüs, die eine Speisekarte bietet, ist $V \times H \times N$, wobei V die Menge aller Vorspeisen, H die Menge aller Hauptspeisen, N die Menge aller Nachspeisen ist.
- Die reelle Zahlenebene ist $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Kartesisches Produkt

Satz (Mächtigkeit)

Sei $k \in \mathbb{N}$ und seien $M_1, M_2, \ldots, M_k$ Mengen. Dann gilt

$$|M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_k| = |M_1| \cdot |M_2| \cdot \ldots \cdot |M_k|.$$

Beispiel:
Skatkartenspiel: $F \times W$ mit
$F := \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$ und $W := \{7, 8, 9, 10, B, D, K, A\}$
Mächtigkeit von $|F \times W| = |F| \cdot |W| = 4 \cdot 8 = 32$

Relationen

Definition (Relation)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $M_1, M_2, \ldots, M_n$ Mengen. Eine Teilmenge R des kartesischen Produkts $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ heißt **Relation** von $M_1, M_2, \ldots, M_n$ mit **Stelligkeit** n.

Beispiel

- *die Skatkarten, die ich auf der Hand habe, als 2-stellige Relation der Mengen* $F := \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$ *und* $W := \{7, 8, 9, 10, B, D, K, A\}$
- $\leq$ *als Relation auf* $\mathbb{N}$
  $\leq = \{(1,1), (1,2), (1,3), \ldots\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- *die Menge aller Geschwisterpaare als zweistellig Relation auf der Menge aller Menschen.*

Bemerkung:

Jedes kartesische Produkt ist eine Relation

Funktionen

Funktionen

Was wir aus der Schule kennen:

- $f(x) = x^2$
- $g(x) = \sin(x)$
- $h(x) = \sqrt{e^x}$
- ...

Jedes x hat *genau einen* "zugehörigen" Wert.

Funktionen sind Relationen auf zwei Mengen, wobei **jedem** Element der ersten Menge, **genau ein** Element der zweiten Menge zugeordnet wird.

Funktionen sind spezielle Relationen.

Funktionen

Definition (Funktion)

Seien X und Y Mengen.

(a) Eine Relation $f \subseteq X \times Y$, bei der es zu jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in f$ gibt, nennen wir **Funktion von X nach Y** (in Zeichen: $f : X \to Y$). Die Menge X heißt **Definitionsbereich** von f und die Menge Y **Bildbereich** von f.

(b) Sei f eine Funktion von X nach Y. Für jedes $x \in X$ bezeichnen wir mit $f(x)$ das eindeutige $y \in Y$, für das $(x, y) \in f$ gilt. Wir nennen $f(x)$ auch den **Funktionswert** von x.

(c) Sei f eine Funktion von X nach Y. Wir nennen die Menge

$$f(X) := \{y \in Y \mid \text{ Es gibt ein } x \in X \text{ mit } f(x) = y\}$$

das **Bild** von f.

Funktion

Bei welchen der folgenden Relationen handelt es sich um Funktionen?

1. Die geordneten Paare der Form (Matrikelnummer, Studierende) als Teilmenge des kartesischen Produkts von $\mathbb{N}$ mit den Studierenden der Goethe Universität
   nein, denn Matrikelnummer $\subsetneq \mathbb{N}$

2. Die geordneten Paare der Form (Adresse, Einwohner Deutschlands) als Teilmenge des kartesischen Produkts der Menge aller Adressen in Deutschland und der Einwohner*innen Deutschlands
   nein, denn mehrere Einwohner*innen haben dieselbe Adresse.

3. Die Menge aller tatsächlich gebildeten Tanzpaare der Form (Mensch, Mensch) als Teilmenge des kartesischen Produkts der Tanzkursteilnehmer*innen (vorausgesetzt, jede*r findet eine*n Tanzpartner*in)
   ja, unter der Voraussetzung

Notation von Funktionen

Notation

Die Varianten

- $f_1 = \{(0,0),(1,2),(2,4),(3,6),\ldots\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- $f_2 = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid y = 2x\}$
- $f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f_3(n) := 2n$
- $f_4 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f_4 : n \mapsto 2n$

beschreiben allesamt dieselbe Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$, die jeder natürlichen Zahl ihr Doppeltes zuweist.

Gleichheit von Funktionen

Definition (Gleichheit von Funktionen)

Seien X und Y Mengen, seien f und g Funktionen mit dem gleichen Definitionsbereich X und dem gleichen Bildbereich Y.

Wir bezeichnen f und g als **gleich** (in Zeichen: $f \equiv g$), wenn für alle $x \in X$ gilt: $f(x) = g(x)$.

- gleicher Definitionsbereich wegen des Gleichheitsbegriffs für Mengen
- gleicher Bildbereich wegen:

  Beispiel:

  - $f_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f_0(n) := n$
  - $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ f_1(n) := n$

  Beobachtung: Alle Elemente aus $\mathbb{N}$ sind Funktionswerte von f_0, aber nicht alle Elemente aus $\mathbb{Z}$ sind Funktionswerte von f_1. Zum Beispiel gibt es kein $n \in \mathbb{N}$, so dass $f_1(n) = -1$.

Eigenschaften von Funktionen

Definition (surjektiv, injektiv, bijektiv)

Sei $f : X \to Y$ eine Funktion.

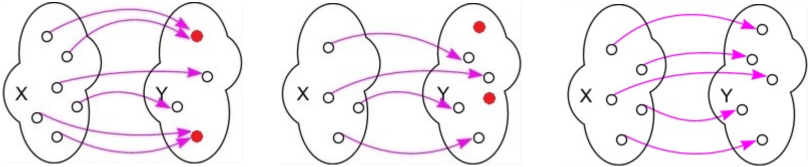
(a) Wir bezeichnen f als *surjektiv*, wenn es für jedes $y \in Y$ mindestens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.

(b) Wir bezeichnen f als *injektiv*, wenn es für jedes $y \in Y$ höchstens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.

(c) Wir bezeichnen f als *bijektiv*, wenn es für jedes $y \in Y$ genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.

Beobachtung:
f ist genau dann bijektiv, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Eigenschaften von Funktionen



(a) surjektive Funktion (b) injektive Funktion (c) bijektive Funktion

Abbildung: *Quelle:* http://de.wikibooks.org/wiki/Mathematik:_Analysis:_Grundlagen:_Funktionen

Eigenschaften von Funktionen

Beispiel: Sind die folgenden Funktionen surjektiv, injektiv, bijektiv?

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := |x|$
  nein, nein, nein
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ g(x) := |x|$
  ja, nein, nein
- $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ h(x) := |x|$
  ja, ja, ja

Beobachtung: Jede nicht-surjektive Funktion lässt sich durch Verkleinerung des Bildbereichs in eine surjektive Funktion verwandeln.

Ebenso lässt sich jede Funktion durch Verkleinerung des Definitionsbereichs in eine injektive Funktion verwandeln.

Fragen?

?