



Tag 3a - Minimierung und Schaltungsentwurf

Aufgabe 1: Minimierung von Funktionen

Bilden Sie für jede Funktion eine minimale Normalform.

(a) $f_1(a, b, c, d) = (abcd) \vee (\bar{a}bcd) \vee (ab\bar{c}d) \vee (a\bar{b}cd) \vee (\bar{a}\bar{b}cd) \vee (\bar{a}b\bar{c}d)$

(b) $f_2(c, d, e, f) = m_0 \vee m_2 \vee m_4 \vee m_6 \vee m_8 \vee m_{12}$

(c) $f_3(a, b, c) = M_0 \wedge M_1 \wedge M_2 \wedge M_4 \wedge M_5$

Solution:

(a)

$$\begin{aligned} f_1(a, b, c, d) &= (abcd) \vee (\bar{a}bcd) \vee (ab\bar{c}d) \vee (a\bar{b}cd) \vee (\bar{a}\bar{b}cd) \vee (\bar{a}b\bar{c}d) \\ &= (acd) \vee (abd) \vee (\bar{a}cd) \vee (\bar{a}bd) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f_2(c, d, e, f) &= m_0 \vee m_2 \vee m_4 \vee m_6 \vee m_8 \vee m_{12} \\ &= (\bar{c}\bar{d}\bar{e}\bar{f}) \vee (\bar{c}\bar{d}e\bar{f}) \vee (\bar{c}d\bar{e}\bar{f}) \vee (\bar{c}de\bar{f}) \vee (c\bar{d}\bar{e}\bar{f}) \vee (cd\bar{e}\bar{f}) \\ &= (\bar{c}\bar{d}\bar{f}) \vee (\bar{c}\bar{e}\bar{f}) \vee (\bar{c}d\bar{f}) \vee (d\bar{e}\bar{f}) \vee (c\bar{e}\bar{f}) \\ &= (\bar{c}\bar{f}) \vee (\bar{e}\bar{f}) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} f_3(a, b, c) &= M_0 \wedge M_1 \wedge M_2 \wedge M_4 \wedge M_5 \\ &= (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b \vee \bar{c}) \wedge (a \vee \bar{b} \vee c) \wedge (\bar{a} \vee b \vee c) \wedge (\bar{a} \vee b \vee \bar{c}) \\ &= (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c) \wedge (b \vee \bar{c}) \wedge (\bar{a} \vee b) \\ &= b \wedge (a \vee c) \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Primimplikanten

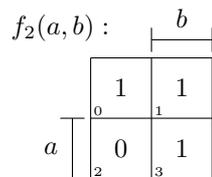
(a) Bestimmen Sie für folgende Funktionen alle Primimplikanten.

i)

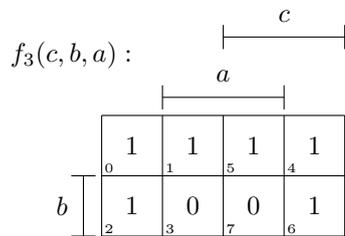
$f_1(a, b) :$

| | | |
|-----|-----|---|
| | b | |
| | 0 | 1 |
| a | 0 | 0 |
| | 2 | 3 |

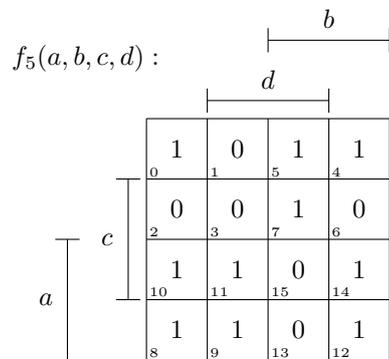
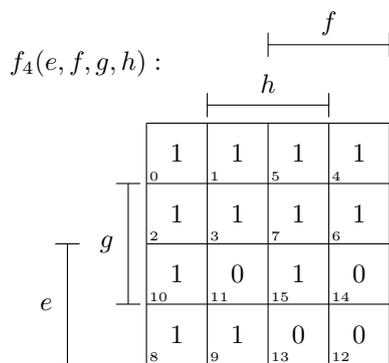
ii)



iii)



iv)

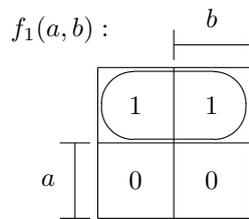


(b) Welche der Primimplikanten sind Kernprimimplikanten, welche sind relativ eliminierbar und welche absolut eliminierbar?

(c) Geben Sie jede Funktion in minimaler DNF an.

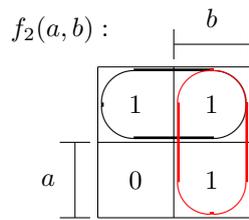
Solution: Lösungen zu Aufgabenteilen (b) und (c) stehen direkt unterhalb des KV-Diagramms.

(a) i)

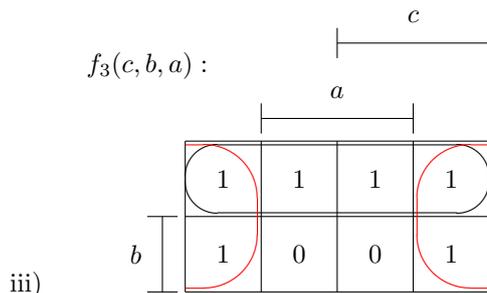


\bar{a} : ist Kernprimimplikant.
minimale DNF: $f_1(a, b) = \bar{a}$.

ii)



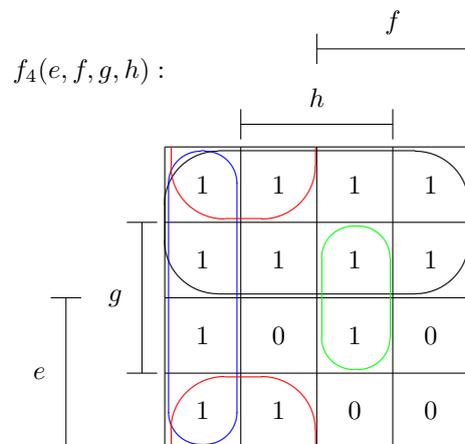
\bar{a} und b sind beide Kernprimimplikanten.
minimale DNF: $f_2(a, b) = \bar{a} \vee b$



iii)

\bar{b} und \bar{a} sind beide Kernprimimplikanten.
minimale DNF: $f_3(c, b, a) = \bar{a} \vee \bar{b}$

iv)



\bar{e} , $\bar{f}\bar{h}$, fgh und $\bar{f}\bar{g}$ sind alle Kernprimimplikanten.
minimale DNF: $f_4(e, f, g, h) = \bar{e} \vee (\bar{f}\bar{h}) \vee (fgh) \vee (\bar{f}\bar{g})$

$f_5(a, b, c, d) :$

Kernprimimplikanten: $a\bar{b}$, $a\bar{d}$, $\bar{a}bd$ und $\bar{c}\bar{d}$
 absolut eliminierbar: $\bar{a}b\bar{c}$
 minimale DNF: $f_5(a, b, c, d) = (a\bar{b}) \vee (a\bar{d}) \vee (\bar{a}bd) \vee (\bar{c}\bar{d})$

Aufgabe 3: Don't care

(a) Bestimmen Sie für folgende Funktionen alle Primimplikanten.

i)

$f_1(a, b, c) :$

| | | | | |
|--|---|---|---|---|
| | 0 | - | 1 | 1 |
| | 1 | - | 0 | - |

ii)

$f_2(a, b, c, d) :$

| | | | | |
|--|---|---|---|---|
| | - | 0 | 1 | 1 |
| | 0 | 0 | 1 | 0 |
| | 1 | - | - | 1 |
| | 1 | 1 | 0 | - |

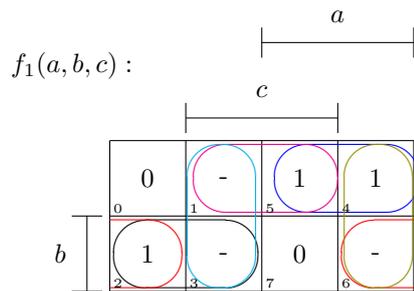
iii)

| a | b | c | d | $f_3(a, b, c, d)$ |
|-----|-----|-----|-----|-------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | — |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | — |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | — |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | — |

- (b) Welche der Primimplikanten sind Kernprimimplikanten, welche sind absolut eliminierbar und welche relativ eliminierbar?
- (c) Geben Sie jede Funktion in minimaler DNF an.

Solution:

(a) i)



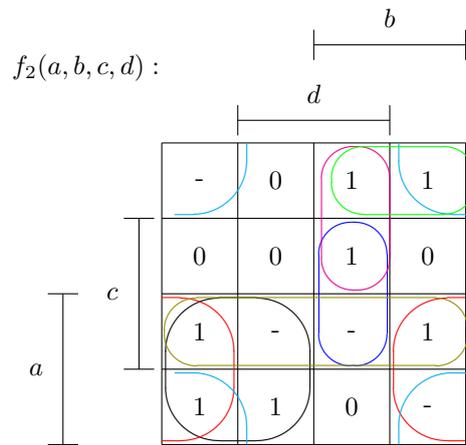
Alle sind relativ eliminierbar, denn alle 1-en sind von mehreren Primimplikanten überdeckt. Wir suchen aber die minimale Überdeckung der 1-en. Also muss $a\bar{b}$ genommen werden da zwei 1-en enthalten, gegenüber den Alternativen.

Damit werden $\bar{b}c$, und $a\bar{c}$ überflüssig, da die 1-en bereits überdeckt sind. $\bar{a}c$ fällt sowieso weg, denn er enthält gar keine 1-en

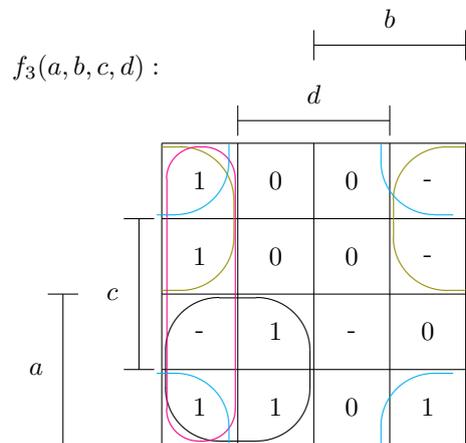
$\bar{b}c$ und $b\bar{a}$ sind gleichwertige Alternativen zueinander. Daher gibt es zwei Möglichkeiten für die minimale DNF: $f_3(a, b, c) = (a\bar{b}) \vee (b\bar{c})$ oder

$$f_3(a, b, c) = (a\bar{b}) \vee (b\bar{a})$$

ii)



Kernprimimplikant: $a\bar{b}$
 relativ eliminierbar: $a\bar{d}$, ac , $\bar{c}\bar{d}$, $\bar{a}b\bar{c}$, $\bar{a}bd$ und bcd .
 minimale DNF: $f_2(a, b, c, d) = (a\bar{b}) \vee (a\bar{d}) \vee (\bar{c}\bar{d}) \vee (\bar{a}bd)$



Kernprimimplikanten: $a\bar{b}$, $\bar{c}\bar{d}$
 relativ eliminierbar: $\bar{a}\bar{d}$, $\bar{b}\bar{d}$
 minimale DNF: $f_3(a, b, c, d) = (a\bar{b}) \vee (\bar{c}\bar{d}) \vee (\bar{a}\bar{d})$ alternativ ginge auch:
 $f_3(a, b, c, d) = (a\bar{b}) \vee (\bar{c}\bar{d}) \vee (\bar{b}\bar{d})$

Aufgabe 4: Primzahlen

Entwickeln Sie eine Schaltung mit vier Eingangssignalen, die für alle Zahlen zwischen 0 und 15 den Wert 1 liefert, wenn es sich bei der Zahl um eine Primzahl handelt.

Hinweis: die Zahlen können über die vier Eingangsvariablen binär codiert eingegeben werden.

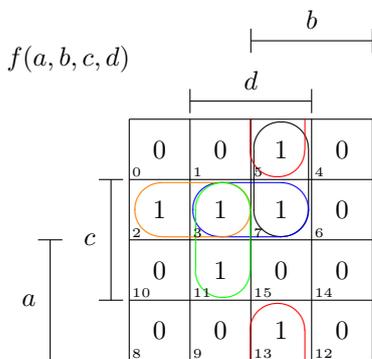
Solution: Zunächst sollte eine Wahrheitstabelle aufgestellt werden, um die Schaltfunktion auf zu stellen.

| a | b | c | d | Prim |
|-----|-----|-----|-----|------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

Dann aus der Wahrheitstabelle die KDNF der Schaltfunktion aufstellen.

$$f(a, b, c, d) = (\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}) \vee (\bar{a}\bar{b}cd) \vee (\bar{a}b\bar{c}\bar{d}) \vee (\bar{a}bcd) \vee (a\bar{b}\bar{c}d) \vee (ab\bar{c}d)$$

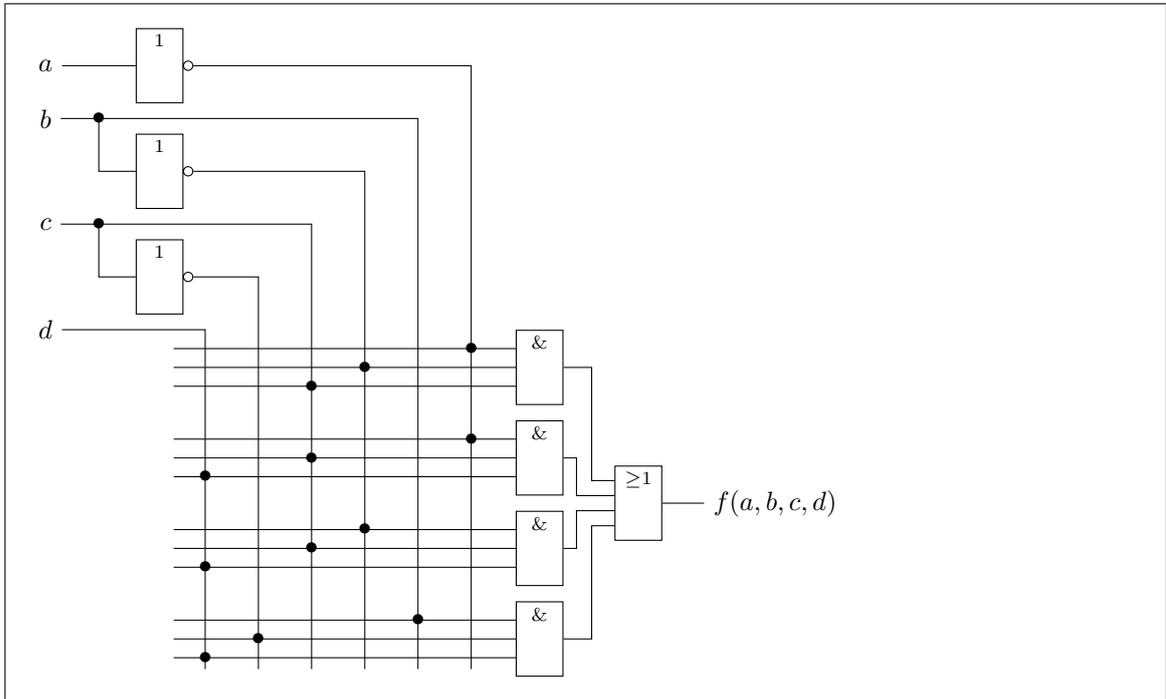
Dann das KV-Diagramm benutzen, um die Schaltung zu minimieren.



Hier gibt's mehrere Möglichkeiten. Primimplinkanten rot, grün und gelb müssen wir nehmen, der blaue und schwarze sind relativ eliminierbar.

$$f(a, b, c, d) = (\bar{a}\bar{b}c) \vee (\bar{a}cd) \vee (\bar{b}cd) \vee (b\bar{c}d)$$

Die Schaltung zeichnen:



Viel Erfolg!