GOETHE
UNIVERSITÄT
FRANKFURT AM MAIN

6. Übungsblatt (erschienen am 18.12.2019)

Aufgabe 1

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zur Lösung des linearen schlechtgestellten Problems $Kx = y$ mit $K \in \mathcal{K}(X, Y)$ betrachten wir die *n-fach iterierte Tikhonov-Regularisierung*,

$$R_{\alpha,n} y^\delta := x^\delta_{\alpha,n},$$

wobei $x^\delta_{\alpha,m} \in X$, $m = 0, 1, \ldots, n$ definiert ist durch die Rekursionsvorschrift:

$$x^\delta_{\alpha,0} = 0, \quad (K^*K + \alpha I)x^\delta_{\alpha,m+1} = K^*y^\delta + \alpha x^\delta_{\alpha,m}, \quad m = 0, \ldots, n-1.$$

(a) Zeigen Sie, dass $R_{\alpha,n} = F_{\alpha,n}(K^*K)K^*$, wobei

$$F_{\alpha,n}(\lambda) := \frac{1}{\lambda}\left(1 - \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha + \lambda}\right)^n\right)$$

(b) Zeigen Sie, dass F_α ein regularisierender Filter und damit R_α eine Regularisierung ist.

Aufgabe 2 (Programmieraufgabe)

Wir betrachten das inverse Problem der numerischen Differentiation, d.h. die Invertierung des Integrationsoperators

$$A : L^2(0,1) \to L^2(0,1), \quad (Af)(x) := \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Zur numerischen Behandlung ersetzen wir eine Funktion $f \in L^2(0,1)$ durch den zugehörigen Vektor $\bar{f} \in \mathbb{R}^n$ ihrer Auswertungen auf dem äquidistanten Gitter $(x_i)_{i=1}^n$, wobei $x_i = (i-1)h$ und $h = \frac{1}{n-1}$ zu gegebenem $n \in \mathbb{N}$.

(a) Bestimmen Sie die Diskretisierung $\bar{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ des Operators A auf diesem äquidistanten Gitter, indem Sie die Trapezregel zur Approximation der Integration verwenden.

Wie lautet die Diskretisierung von A^*?

Untersuchen Sie dann numerisch die Anwendung verschiedener Regularisierungsverfahren auf das inverse Problem

$$\bar{A}\bar{f} = \bar{g}.$$

Verwenden Sie dabei als rechte Seite eine Diskretisierung von $g(x) = x^4 - x^2$.

(b) Erzeugen Sie Diskretisierungen $\bar{g}^\delta$ von mit Messfehlern behafteten rechten Seiten $g^\delta \in L^2(0,1)$, $\left\|g^\delta - g\right\| \le \delta$.

(c) Lösen Sie das inverse Problem jeweils mit der Moore-Penrose-Inverse, und mit dem Tikhonov-Verfahren unter Anwendung der Parameterwahlstrategie $\alpha := \delta$.

Untersuchen Sie die Verfahren numerisch auf Konvergenz. Zur qualitativen Untersuchung plotten Sie die Ergebnisse der zwei Verfahren jeweils zu unterschiedlichen Werten von δ gemeinsam mit der analytischen Lösung. Wie hängen die Ergebnisse vom Diskretisierungsparameter n ab?

(d) Lösen Sie das Problem außerdem durch Anwendung finiter Differenzen

$$\frac{\bar{g}_{\delta,i+k} - \bar{g}_{\delta,i}}{kh}$$

wobei Sie $k \in \mathbb{N}$ gemäß `k = ceil(sqrt(delta)/h)` wählen.

Besprechung: In der Übung am 22.01.20