GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

5. Übungsblatt (erschienen am 04.12.19)

Aufgabe 1 (Unendlich dimensionale Matrizen)
Gegeben sei eine *unendlich dimensionale Matrix*

$$(m_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$$

wobei $l^2(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ analog $l^2(\mathbb{N})$ definiert ist, also

$$l^2(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) := \{(m_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}},\ \sum_{i,j=1}^{\infty} |m_{ij}|^2 < \infty\}, \quad \|(m_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}\|_{l^2(\mathbb{N}\times\mathbb{N})} := \left(\sum_{i,j=1}^{\infty} |m_{ij}|^2\right)^{1/2}.$$

Wir definieren damit den Operator $M:\ l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$ gemäß der Vorschrift

$$Mv := \left(\sum_{j=1}^{\infty} m_{ij} v_j\right)_{i\in\mathbb{N}}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $M \in \mathcal{L}(l^2(\mathbb{N}))$ und dass

$$\|M\|_{\mathcal{L}(l^2(\mathbb{N}))} \leq \|(m_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}\|_{l^2(\mathbb{N}\times\mathbb{N})}.$$

Berechnen Sie außerdem die Adjungierte M^*.

(b) Sei $(m_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ eine Diagonalmatrix, also $m_{ij} = 0$ für $i \neq j$. Zeigen Sie, dass dann $(m_{ii})_{i\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist und dass M kompakt ist.

Aufgabe 2
Betrachten Sie den Operator

$$A : L^2(0,1) \to L^2(0,1), \quad (Af)(x) := \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y.$$

(a) Geben Sie den adjungierten Operator A^* an.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt:

$$Av_j(x) = \sigma_j u_j(x) \quad \text{und} \quad A^* u_j(x) = \sigma_j v_j(x) \tag{1}$$

mit $\sigma_j := \left(\left(j - \frac{1}{2}\right)\pi\right)^{-1}$,

$$v_j(x) := \sqrt{2}\cos\left(\left(j - \frac{1}{2}\right)\pi x\right) \quad \text{und} \quad u_j(x) := \sqrt{2}\sin\left(\left(j - \frac{1}{2}\right)\pi x\right).$$

(c) Zeigen Sie, dass $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ Orthonormalsysteme in $L^2(0,1)$ sind.
(Tipp: Sie können dies aus (1) ohne partielle Integration folgern.)

Besprechung: In der Übung am 18.12.19