GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

3. Übungsblatt (erschienen am 06.11.19)

Aufgabe 1

Seien A, B und C (möglicherweise unbeschränkte) Operatoren. Zeigen Sie die Rechenregeln:

$$\begin{aligned}(A+B)+C &= A+(B+C),\\ (AB)C &= A(BC),\\ (A+B)C &= AC+BC,\\ A(B+C) &\supseteq AB+AC.\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Moore-Penrose-Inverse der Abbildung

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} : \; \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n.$$

Aufgabe 3

Betrachten Sie die *Shiftoperatoren* $W, S : \; l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$,

$$W : \; (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (x_2, x_3, x_4, \ldots), \qquad S : \; (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, \ldots)$$

Zeigen Sie, dass $W, S \in \mathcal{L}(l^2(\mathbb{N}))$ und berechnen Sie $\|W\|_{l^2(\mathbb{N})}$, $\|S\|_{l^2(\mathbb{N})}$ sowie die Moore-Penrose-Inversen W^+ und S^+.

Aufgabe 4

Betrachten Sie die Abbildung $A : l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$, $Ax := y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n = \frac{1}{n} x_n$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $A \in \mathcal{L}(l^2(\mathbb{N})), \|A\|_{\mathcal{L}(l^2(\mathbb{N}))} = 1$

(b) $l^2(\mathbb{N}) = \overline{\mathcal{R}(A)} \supsetneq \mathcal{R}(A)$

(c) $\mathcal{D}(A^+) = \mathcal{R}(A)$ und $A^+ y = x$, wobei $x_n = n y_n$.

Besprechung: In der Übung am 20.11.19