2. Übungsblatt (erschienen am 23.10.2019)

Aufgabe 1 (Satz von Lax-Milgram)

Es sei X ein Hilbertraum und

$$b : X \times X \to \mathbb{R},$$

eine stetige, symmetrische, koerzive Bilinearform, d.h.

$$\begin{aligned} b(u,v) &= b(v,u) && \forall u,v \in X && \text{(Symmetrie)}\\ \exists C>0 \ :\ |b(u,v)| &\leq C\,\|u\|\,\|v\| && \forall u,v \in X && \text{(Stetigkeit)}\\ \exists \beta>0 \ :\ b(u,u) &\geq \beta\,\|u\|^2 && \forall u \in X && \text{(Koerzivität)} \end{aligned}$$

und b ist in beiden Komponenten linear. Weiterhin sei $l \in X'$.

Zeigen Sie, dass dann genau ein $u \in X$ existiert mit

$$b(u,v) = l(v) \quad \text{für alle } v \in X, \tag{1}$$

dass u stetig und linear von l abhängt,

$$\|u\|_X \leq \frac{1}{\beta}\,\|l\|_{X'},$$

und dass u das eindeutige Minimum ist von

$$J:\ X \to \mathbb{R}, \quad J(v) := \frac{1}{2}b(v,v) - l(v).$$

Gehen Sie zum Beweis der Existenz wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie zunächst, dass J nach unten beschränkt ist.

(b) Zeigen Sie, dass ein Minimum $u \in H$ dieses Funktionals existiert, indem Sie beweisen, dass jede J minimierende Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset H$ eine Cauchyfolge ist. Verwenden Sie dazu

$$b(u_k - u_l, u_k - u_l) = 4J(u_k) + 4J(u_l) - 8J(\frac{u_k + u_l}{2}).$$

(c) Zeigen Sie, dass das Minimum von J die Gleichung (1) löst, indem Sie neben dem Minimum u auch Elemente $u + cv$ mit $c \in \mathbb{R}$, $v \in H$ betrachten.

Aufgabe 2 (Der Hilbertraum l^2)

Betrachten Sie den Raum aller quadratisch summierbaren Folgen

$$l^2(\mathbb{N}) := \{x := (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 < \infty\}$$

Zeigen Sie, dass $l^2(\mathbb{N})$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y\rangle := \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n \quad x, y \in l^2(\mathbb{N})$$

ein unendlich-dimensionaler (reeller) Hilbertraum ist.

Besprechung: In der Übung am 06.11.19