GOETHE-UNIVERSITÄT FRANKFURT

MASTERARBEIT

Krull-Bewertungen auf Funktionenkörpern regulärer arithmetischer Flächen

---

Autorin:
Theresa KUMPITSCH
Matrikelnummer:
4956875

Betreuer:
Prof. Jakob STIX
Zweitgutachter:
Prof. Alex KÜRONYA

Zur Erlangung des akademischen Grades
Master of Science (M.Sc.)

in dem Schwerpunkt

Algebra und Zahlentheorie

Fachbereich 12 – Informatik und Mathematik

12. Juni 2018

Eidesstattliche Erklärung

Ich, Theresa KUMPITSCH, versichere an Eides statt durch meine eigene Unterschrift, dass ich die vorstehende Arbeit mit dem Titel „Krull-Bewertungen auf Funktionenkörpern regulärer arithmetischer Flächen“ selbständig und ohne fremde Hilfe angefertigt und alle Stellen, die wörtlich oder annähernd wörtlich aus Veröffentlichungen genommen sind, als solche kenntlich gemacht habe. Die Versicherung bezieht sich auch auf in der Arbeit gelieferte Zeichnungen, Skizzen, bildliche Darstellungen und dergleichen.

.

Unterschrift:

Datum:

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

In dieser Arbeit sollen Krull-Bewertungen auf Funktionskörpern regulärer arithmetischer Flächen untersucht werden. Bewertungen gab es in der Mathematik im Grunde schon seit der Antike. Der Euklidische Beweis über die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung macht es möglich, ganze Zahlen mit Hilfe der Exponenten der vorkommenden Primfaktoren zu beschreiben und diese Exponenten repräsentieren den Wert der entsprechenden p-adischen Bewertung, die in der Zahlentheorie auftritt. Ähnliches sieht man in der Funktionentheorie: die Ordnung einer holomorphen Funktion in einem gegebenen Punkt P auf einer kompakten Riemannschen Fläche gibt eine Bewertung auf dem entsprechenden Funktionskörper und die Funktion ist, bis auf konstanten Faktor, durch ihr Verhalten in diesen Bewertungen bestimmt.

Solche Bewertungen bzw. Absolutbeträge wurden in der Zahlentheorie und komplexen Analysis bereits im 19. Jahrhundert untersucht, Bewertungstheorie als getrenntes und systematisches Forschungsgebiet trat jedoch erst um 20. Jahrhundert in Erscheinung, nachdem 1912 der ungarische Mathematiker Josef Kürschák das erste abstrakte Strukturtheorem auf einem bewerteten Körper vorstellte. Der Satz betraf die Existenz der vollständiger algebraisch abgeschlossener Erweiterungen bewerteter Körper und Kürschák verstand seine Arbeit als Versuch, Hensels Theorie der p-adischen Zahlen eine allgemeine Grundlage zu geben. Es waren unter anderem Arbeiten von Alexander Ostrowski, welcher die Absolutbeträge auf $\mathbb{Q}$ (bis auf Äquivalenz) klassifizierte und zeigen konnte, dass alle Körper, die vollständig bzgl. eines archimedischen Absolutbetrags sind, isomorph zu $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ sind, und von Helmut Hasse, welcher das berühmte Lokal-Global-Prinzip einführte und zur Entstehung der lokalen Klassenkörpertheorie wesentlich beitrug, die die wichtige Rolle der Bewertungstheorie für die Entwicklung der Zahlentheorie offenbarten.

Krull hat den Begriff der Bewertung in den 1930ern verallgemeinert und damit Anwendungen in anderen Gebieten der Mathematik – so wie algebraische und reell-algebraische Geometrie – ermöglicht. Anders als in der klassischen Definition sind nun auch Wertegruppen höheren Ranges erlaubt: Für einen Körper K ist eine *Krull-Bewertung* auf K definiert als eine Abbildung

$$v : K \longrightarrow \Gamma \cup \{\infty\},$$

wobei $\Gamma = (\Gamma, \leq, +)$ eine total geordnete abelsche Gruppe bezeichnet, für die gilt

(i) $v(x \cdot y) = v(x) + v(y)$;

(ii) $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$;

(iii) $v(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$.

Ziel dieser Arbeit ist es, die Resultate aus [PS11, A.1.] zu diskutieren und Details dazu auszuarbeiten. Gegeben sei eine endliche k über dem p-adischen Zahlkörper

$\mathbb{Q}_p$. Bezeichne v die kanonische Bewertung auf diesem Körper und $\mathfrak{o}$ den dazugehörigen vollständigen diskreten Bewertungsring. Sei nun ferner K der Funktionskörper einer glatten, projektiven, geometrisch zusammenhängenden Kurve X über k. Wir untersuchen im Folgenden den Raum

$$\mathrm{Val}_{\mathfrak{o}}(K) = \mathrm{Val}(K/k) \cup \mathrm{Val}_v(K)$$

der Bewertungen w auf K, dessen Einschränkung auf k entweder trivial oder v ist. Eine reguläre arithmetische Fläche $\mathscr{X}$ über $\operatorname{Spec} \mathfrak{o}$, dessen generische Faser isomorph zu X ist und dessen spezielle Faser strenge normale Überkreuzungen besitzt, wird als *Modell* von X über $\mathfrak{o}$ bezeichnet. Aus dem Bewertungskriterium für Eigentlichkeit folgt, dass für jede Bewertung $w \in \mathrm{Val}_{\mathfrak{o}}(K)$ eine kanonische Abbildung $\operatorname{Spec} R_w \to \mathscr{X}$ existiert, die den abgeschlossenen Punkt von $\operatorname{Spec} R_w$ auf das Zentrum $x_w \in \mathscr{X}$ von w in $\mathscr{X}$ schickt. Abbildungen zwischen den verschiedenen Modellen, die die Identität auf X sind, respektieren das Zentrum einer Bewertung und es gibt eine bijektive Abbildung

$$\delta : \mathrm{Val}_{\mathfrak{o}}(K) \to \varprojlim \mathscr{X},$$

die einer Bewertung das kompatible System seiner Zentren zuordnet. Damit legen die Zentren der Bewertung $w \in \mathrm{Val}_{\mathfrak{o}}(K)$ bereits den Bewertungsring $R_w = \varinjlim \mathcal{O}_{\mathscr{X},x_w}$ fest. Es können verschiedene *Typen* von Bewertungen unterschieden werden, gegeben durch

$$\mathrm{ht}(w) = \varinjlim_{\mathscr{X}} \mathrm{ht}(x_w) = \varinjlim_{\mathscr{X}} \dim(\mathcal{O}_{\mathscr{X},x_w}).$$

Die einzige Bewertungen von Typ 0 ist die triviale Bewertungen. Typ 1-Bewertungen sind diskrete Bewertungen, die assoziiert sind zu (horizontalen oder vertikalen) Primdivisoren auf $\mathscr{X}$, welche in hinreichend feinen Modellen auftauchen (Typ 1h bzw. 1v). Aufblasungen werden letztlich das Hauptwerkzeug sein, um Bewertungen von Typ 2, dessen Zentren abgeschlossene Punkte auf der speziellen Faser sind, zu unterscheiden. Zunächst unterscheiden wir, ob das Zentrum (für hinreichend feine Modelle) auf den strikten Tranformierten eines horizontalen oder vertikalen Primdivisors bleibt oder nicht. Ist dies der Fall, so erhalten wir eine Bewertung von Rang 2 und bezeichnen diese als Typ 2h bzw. 2v. Andernfalls fragen wir uns, ob das Zentrum im Knoten zweier vertikaler Primdivisoren (Typ $2\mathrm{u}_{\mathrm{node}}$) oder im glatten Ort der speziellen Faser bleibt (Typ $2\mathrm{u}_{\mathrm{sm}}$) oder zwischen diesen Zuständen wechselt (Typ $2\mathrm{u}_{\mathrm{alt}}$). Die Bewertungen von Typ $2\mathrm{u}_{\mathrm{node}}$ sollen dabei im Detail betrachtet werden. Es stellt sich heraus, dass die Wertegruppe einer solcher Bewertung w dicht in $\mathbb{R}$ liegt, d.h. der Form $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\gamma$ für $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist. Ziel wird es also insbesondere sein herauszufinden, wie sich diese Irrationalität γ aus dem Verhalten der Zentren x_w unter Aufblasung ablesen lässt und wie γ aus der Geometrie der Modelle als reelle Zahl bestimmt wird. Dafür werden wir im Abschnitt 4.2 einen Divisions-Algorithmus einführen, um Erzeuger der Wertegruppe zu bestimmen.

Die Arbeit ist nun folgendermaßen strukturiert: Kapitel 2 legt die Grundlagen der Bewertungstheorie dar und führt den Begriff der Krull-Bewertung ein. Der *Rang* $\mathrm{rk}(\Gamma)$ einer Bewertung wird als Anzahl der konvexen Untergruppe ihrer Wertegruppe Γ definiert und es wird gezeigt, dass dieser der Krull-Dimension des Spektrums des Bewertungsrings entspricht. Wir führen ferner den *rationale Rang* $\mathrm{rr}(\Gamma)$ ein, welcher definiert ist als die Dimension von $\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ als $\mathbb{Q}-$Vektorraum und für den gilt, dass $\mathrm{rk}(\Gamma) \leq \mathrm{rr}(\Gamma)$. Wir diskutieren außerdem, wie zu einer gegebenen Bewertung eine Bewertung höheren Ranges konstruiert werden kann und zeigen, dass Bewertungsringe maximal bezüglich lokaler Dominanz sind. Letzteres zeigt, dass sich Bewertungen auf beliebige Körpererweiterungen fortsetzen lassen. Es zeigt sich, dass es im Fall (endlicher) algebraischer Erweiterungen K/k keine nicht-triviale Bewertung von K gibt, die trivial auf k ist und dass, gegeben eine Bewertung v auf k, die *fundamentale Ungleichung* gilt

$$\sum_{w \in \mathrm{Val}_v(K)} e(w/v) f(w/v) \leq n = [K : k],$$

wobei $e(w/v)$ und $f(w/v)$ Verzweigungsindex bzw. Restklassengrad von w über v bezeichnen. Im Fall, dass K ein Funktionenkörper von k ist, werden wir, gegeben eine Bewertung v auf k mit Wertegruppe Γ, zeigen, dass eine Fortsetzung w auf K mit der Wertegruppe Γ' die folgende *Dimensionsungleichung* erfüllt

$$\mathrm{trdeg}(\kappa(w)/\kappa(v)) + \mathrm{rr}(\Gamma'/\Gamma) \leq \mathrm{trdeg}(K/k).$$

Für einen Integritätsring $A \subseteq K$ wird in Kapitel 3 der Raum der Äquivalenzklassen von Bewertungen $w : K \to \Gamma \cup \{\infty\}$ mit $w(A) \geq 0$ definiert. Wir bezeichnen diesen als *Riemann-Zariski-Raum*[1] von K über A und notieren ihn mit $\mathrm{Val}_A(K)$. Mengen der Form $U(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{Val}_{A[x_1,\ldots,x_n]}(K)$ bilden für $x_1, \ldots, x_n \in K$ die Basis einer Topologie auf $\mathrm{Val}_A(K)$. Wir werden sehen, dass dieser topologische Raum ein *Spektralraum* ist, d.h. quasi-kompakt ist, eine Basis quasi-kompakter offener Mengen besitzt, die abgeschlossen unter endlichen Schnitten ist und jede irreduzible Teilmenge einen eindeutigen generischen Punkt besitzt. Bezeichne nun X ein integres Schema mit Funktionenkörper K, das von endlichem Typ und separiert über Spec A ist. Solche Schemata nennen wir *Modelle von K über A*. Das Hauptresultat des Kapitels besagt, dass sich der Riemann-Zariski-Raum von K über A mit dem projektiver Limes von projektiven Modellen von K über A identifizieren lässt.

Im ersten Teil von Kapitel 4 geht es um die Eigenschaften arithmetischer Flächen – d.h. integrer Schemata X, die flach in Kurven gefasert über einem Dedekindschema S sind. Die Fasern einer arithmetischer Fläche sind zusammenhängende Kurven und zu jeder arithmetischen Fläche $X \to S$ existiert ein birationaler Morphismus $X' \to X$, sodass X' eine reguläre arithmetische Fläche ist, dessen abgeschlossene Fasern strenge normale Überkreuzungen besitzen. Ferner ist nach dem *Faktorisierungstheorem* jeder eigentliche birationale Morphismus regulärer arithmetischer Flächen zusammengesetzt aus einer endlichen Folge von Aufblasungen in abgeschlossenen Punkten. Im zweiten Abschnitt kehren wir schließlich zu der zuvor beschriebenen Ausgangssituation zurück und nutzen diese Resultate zur Klassifizierung des Bewertungszoos der $\mathfrak{o}$-Bewertungen von K.

In Anhang A findet sich eine Zusammenfassung einiger Konzepte der Algebraischen Geometrie – beginnend mit der Definition eines Schemas über verschiedene globale und lokale Eigenschaften von Morphismen und Schemata, bis hin zum Studium birationaler Morphismen und der Auflösung von Singularitäten durch Aufblasung von Schemata. In gewisser Weise wird hier die Sprache eingeführt, in der die Diskussion geführt werden soll. Der Abschnitt wurde von der Autorin im Rahmen der Einarbeitung erstellt und kann je nach Vorwissen zum Nachschlagen oder als Grundlagenkapitel genutzt werden.

[1] Ebenfalls bekannt als *(Riemann-)Zariski-Varietät* oder *Riemann-Manigfaltigkeit*. Es sei bemerkt, dass dieser Name in der Literatur häufig dem Fall, in dem $A = k$ ein Körper ist, vorbehalten ist.

Danksagung

Diese Arbeit wäre nicht ohne die Unterstützung einer Vielzahl von Personen möglich gewesen. Ich würde gerne meinem Betreuer Jakob Stix für das Thema dieser Arbeit und seine hervorragende Betreuung danken. Vielen Dank auch an meinen Zweitgutachter Alex Küronya für die entscheidende Literaturempfehlung sowie seine durchgehende Unterstützung und ermutigenden Worte. Ein Dank gebührt außerdem den wissenschaftlichen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern aus dem Schwerpunkt Algebra und Geometrie, ganz besonders Nithi Rungtanapirom und Sevda Kurul, welche immer ein offenes Ohr für mathematische und nicht-mathematische Probleme aller Art hatten.

Kapitel 2

Bewertungstheorie

In diesem Abschnitt soll eine kurze Einführung in allgemeine Bewertungstheorie gegeben werden, die sich weitgehend an [Mat89], [Con14] und [EP05] orientiert.

2.1 Geordnete Gruppen und Krull-Bewertungen

Definition 2.1.1 ((total) geordnete Gruppe)**.** Eine *geordnete Gruppe* ist ein Tupel $\Gamma = (\Gamma, +, \geq)$ bestehend aus einer abelschen additiven Gruppe $(\Gamma, +)$, auf der die Relation $\geq$ eine totale Ordnung definiert, mit der Eigenschaft, dass für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$ mit $\alpha \geq \beta$ gilt:

$$\alpha + \gamma \geq \beta + \gamma.$$

Ein *Homomorphismus geordneter Gruppen* Γ, Γ' ist ein Gruppenhomomorphismus $f : \Gamma \to \Gamma'$, sodass für alle $\alpha, \beta \in \Gamma$ gilt:

$$\alpha \geq \beta \Rightarrow f(\alpha) \geq f(\beta).$$

Wir definieren außerdem $\Gamma_{\geq\gamma} = \{\delta \in \Gamma;\ \delta \geq \gamma\}$ für alle geordneten Gruppen Γ und alle $\gamma \in \Gamma$. Analog wird $\Gamma_{>\gamma}, \Gamma_{\leq\gamma}$ und $\Gamma_{<\gamma}$ definiert.

Geordnete Gruppen sind torsionsfrei. Es entsteht eine geordnete Menge $\Gamma \cup \{\infty\}$, wenn man zu einer geordneten Gruppe Γ ein Element ∞ hinzufügt, das größer ist als alle Elemente von Γ und die Konvention festlegt, dass $x + \infty = \infty$ für alle $x \in \Gamma$ und $\infty + \infty = \infty$.

Definition 2.1.2 ((Krull-)Bewertung)**.** Für einen Körper K ist eine *Bewertung* auf K definiert als eine Abbildung

$$v : K \longrightarrow \Gamma \cup \{\infty\},$$

wobei Γ eine geordnete Gruppe bezeichnet, für die gilt

(i) $v(x \cdot y) = v(x) + v(y)$;

(ii) $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$;

(iii) $v(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$.

Im Folgenden bezeichne $\mathrm{Val}(K)$ die Menge der Bewertungen eines Körpers K.

Die Bedingung (i) bedeutet, dass v ein Homomorphismus von $K^\times$ nach Γ ist und damit gilt $v(1) = 0$. Für eine Familie $x_1, \ldots, x_n \in K$ gilt ferner

$$v\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \geq \min\{v(x_1), \ldots, v(x_n)\}.$$

Wenn das Minimum nur von einem der $v(x_i)$ angenommen wird, so gilt Gleichheit.

Beispiel 2.1.3. Die Abbildung

$$v(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \in K^\times \\ \infty & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$$

definiert eine Bewertung auf K mit Wertegruppe $\Gamma = \{0\}$, welche wir als *triviale Bewertung* bezeichnen. Auf einem Körper K gibt es immer die triviale Bewertung. Ist K eine algebraische Erweiterung eines endlichen Körpers, so gibt es nur die triviale Bewertung.

Bemerkung 2.1.4. Für eine Bewertung $v : K \longrightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ lassen sich verschiedene assoziierte Objekte definieren:

- Die Untergruppe $v(K^\times)$ von Γ wird *Wertegruppe* genannt und als Γ_v notiert. Man kann Γ ohne Probleme auf Γ_v beschränken und die Bewertung als surjektiv annehmen.

- Der Unterring
$$R_v := \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}$$
von K wird *Bewertungsring* genannt. Die Einheiten $R_v^\times$ sind genau die Elemente $x \in K$ mit $v(x) = 0$.

  Als direkte Konsequenz ist $R_v \setminus R_v^\times$ ein Ideal von R_v, das mit $\mathfrak{m}_v$ notiert wird. Damit ist R_v ein lokaler Ring mit maximalen Ideal $\mathfrak{m}_v$.

- Der *Restklassenkörper* $\kappa(v)$ von v wird definiert als $R_v/\mathfrak{m}_v$.

Bemerkung 2.1.5. Sei k ein Teilkörper von K und w eine Bewertung auf K. Gilt für alle $x \in k^\times$, dass $w(x) = 0$, d.h. ist $w|_k$ die triviale Bewertung, so bezeichnet man w auch als Bewertung von K/k. Die Menge der Bewertungen von K/k bezeichnen wir mit $\mathrm{Val}_k(K)$. Ist R der Bewertungsring, der assoziiert ist zur Bewertung w, so ist dies äquivalent dazu zu fordern, dass R eine k-Algebra ist. Das Bild der natürlichem Abbildung $k^\times \to R$ ist enthalten in $R \setminus \mathfrak{m}_R$. Wir haben also eine Inklusion $k \subseteq \kappa(w)$, d.h. der Restklassenkörper ist eine Erweiterung von k.

Zu einer Bewertung v von k bezeichnen wir die Menge der Bewertungen w von K mit $w|_k = v$ als $\mathrm{Val}_v(K)$. Solche Bewertungen von K werden auch *Fortsetzungen* von v genannt. Allgemein ist eine solche Fortsetzung nicht eindeutig.

Man betrachte nun einen Bewertungsring R_v wie in Bemerkung 2.1.4. Es handelt sich um einen Integritätsring mit der Eigenschaft, dass für alle $x \in K^\times$ gilt, dass $x \in R_v$ oder $x^{-1} \in R_v$. Es folgt außerdem, dass $\mathrm{Quot}(R_v) = K$. Daraus leiten wir ein Kriterium für Bewertungsringe ab, das ohne direkte Angabe einer Bewertung auf K auskommt.

Definition 2.1.6 (Bewertungsring)**.** Ein Integritätsbereich R mit Quotientenkörper K heißt *Bewertungsring*, wenn für jedes Element $x \in K$ gilt:

$$x \notin R \Rightarrow x^{-1} \in R.$$

Ein Bewertungsring R kommt implizit mit Bewertung und Wertegruppe. Der Quotient

$$\Gamma_R = K^\times / R^\times$$

ist nämlich eine geordnete Gruppe. Die Ordnung auf Γ_R ist dabei für $a, b \in K^\times$ gegeben durch

$$a \mod R^\times \leq b \mod R^\times \iff x := \frac{b}{a} \in R.$$

Wir erhalten eine natürliche Abbildung

$$v : K \to \Gamma_R \cup \{\infty\},$$

die für $x \in K^\times$ gegeben ist durch $v(x) = x \mod R^\times$ und $v(0) = \infty$. Es handelt sich um eine Bewertung mit dem Bewertungsring R. Die Bewertung ist genau dann trivial, wenn $R = K$. Damit kann jeder Bewertungsring im Sinne von Definition 2.1.6 als Bewertungsring einer Bewertung v auf K im Sinne von Bemerkung 2.1.4 aufgefasst werden. Ferner können wir von nun an die Wertegruppe eines Bewertung v auf K mit $K^\times / R_v^\times$ identifizieren.

Wir nennen zwei Bewertungen v und v' auf K äquivalent, wenn sie den gleichen Bewertungsring haben, d.h. $R_v = R_{v'}$. Das ist genau dann der Fall, wenn ein Ordnungsisomorphismus $\phi : \Gamma_v \to \Gamma_{v'}$ existiert, sodass $v' = \phi \circ v$. Wir machen im Folgenden keine Unterscheidung zwischen äquivalenten Bewertungen.

Man bemerke ferner, dass die Ideale eines Bewertungsrings total geordnet sind und damit jedes endlich erzeugtes Ideal ein Hauptideal ist.

Proposition 2.1.7. *Sei R ein Integritätsring, der kein Körper ist. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) R ist ein noetherscher Bewertungsring.

(ii) R ist ein lokaler Hauptidealring.

(iii) R ist ein Bewertungsring und die Wertegruppe Γ_R ist isomorph zu $\mathbb{Z}$.

(iv) R ist ein lokaler Ring, dessen maximales Ideal $\mathfrak{m}$ ein Hauptideal ist mit $\bigcap_{n \geq 1} \mathfrak{m}^n = 0$.

(v) R ist ein noetherscher lokaler Ring, für den gilt $\dim_{R/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$.

Beweis. Siehe [Mat89, §11]. □

Definition 2.1.8. (diskreter Bewertungsring) Ein Integritätsring R, der kein Körper ist, heißt *diskreter Bewertungsring*, wenn er die äquivalenten Bedingungen aus Proposition 2.1.7 erfüllt. Die dazugehörige Bewertung nennt man *diskrete Bewertung*. Man nennt diese normiert, wenn ihre Wertegruppe $\mathbb{Z}$ ist.

Ist R eine diskreter Bewertungsring mit $\mathrm{Quot}(R) = K$ und $\mathfrak{m}_R = \pi R$. Dann kann jedes Element $a \in R$ geschrieben werden als $a = \pi^n u$ für $u \in R^\times$ und ein $n \in \mathbb{Z}$. Wir können eine Abbildung $v : K^\times \to \mathbb{Z}$ definieren, indem wir $v(a) = n$ setzen. Für jedes $\lambda \in K^\times$ gilt $\lambda = a/b$ für $a, b \in R$ und wir definieren $v(\lambda) = v(a) - v(b)$. Es lässt sich leicht einsehen, dass dies unabhängig von der Wahl von a und b ist und v eine normierte diskrete Bewertung mit Bewertungsring R und maximalem Ideal πR ist. Ferner sagen wir, die Bewertung v ist eine $\mathfrak{m}$*-adische Bewertung*, d.h. die Bewertung ist definiert durch die Relation

$$v(y) \geq n \iff y \in \mathfrak{m}^n.$$

Die einzigen Ideale sind der Form $P_n(R) := \{x \in R \mid v(x) \geq n\}$, welche von π^n erzeugt werden.

Beispiel 2.1.9. (Diskrete Bewertungen)

(i) Für eine Primzahl $p \in \mathbb{Z}$ wird die p-adische Bewertung auf den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ definiert als
$$v_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \tag{2.1}$$
mit $v_p(p^n \frac{a}{b}) = n$, wenn $n \nmid ab$ und $v_p(0) = \infty$. Der Bewertungsring $\mathbb{Z}_{(p)}$ entspricht der Lokalisierung von $\mathbb{Z}$ an $(p) \setminus \{0\}$ und besteht damit aus allen rationalen Zahlen, deren (reduzierte) Nenner nicht durch p teilbar sind. Das maximale Ideal dieses Rings ist (p) und der Restklassenkörper ist
$$\mathbb{Z}_{(p)}/(p)\mathbb{Z}_{(p)} = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_{(p)} = \mathbb{F}_p,$$
weil Quotient und Lokalisieren vertauschen.

(ii) Der Potenzreihenring $K[[x]]$ ist ein Hauptidealring mit dem einzigen Primelement x. Dann lässt sich die „x-adische"-Bewertung auf $K((x)) = \mathrm{Quot}(K[[x]])$ via $v(\sum_{i\geq 0} a_i x^i) \mapsto \min\{i;\ a_i \neq 0\}$ definieren, die offenbar trivial auf K ist. Der dazugehörige Bewertungsring ist $R = K[[x]]$ mit dem maximalen Ideal xR, bestehend aus allen Potenzreihen, dessen konstanter Term Null ist. Der Restklassenkörper dieser Bewertung ergibt sich damit als K.

(iii) Im Polynomring $K[X]$ ist $\pi = X$ ein Primelement. Im rationalen Funktionenkörper $K(X) = \mathrm{Quot}(K[X])$ besitzt jedes Element $h \in K(X)^\times$ eine eindeutige Darstellung der Form $h = X^n f/g$ mit $f, g \in K[X] \setminus \{0\}$ und $X \nmid fg$. Es lässt sich also eine Bewertung
$$\mathrm{ord}_0 : K(X) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$
definieren, die jeder rationaler Funktion, die nicht die Nullfunktion ist, ihre Nullstellenordnung in $\pi = X$ zuordnet.

Sei A ein Bewertungsring mit Quotientenkörper K. Dann ist offenbar jeder Ring B mit $A \subseteq B \subseteq K$ ebenfalls ein Bewertungsring. Es gilt sogar die folgende stärkere Aussage

Proposition 2.1.10. *Sei $A \subseteq B \subseteq K$ wie eben und $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von A und $\mathfrak{p}$ das maximale Ideal von B. Angenommen $A \neq B$. Dann gilt:*

(i) $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m} \subseteq A \subseteq B$ *und* $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$.

(ii) $\mathfrak{p}$ *ist ein Primideal von A und $B = A_\mathfrak{p}$.*

(iii) $A/\mathfrak{p}$ *ist ein Bewertungsring des Körpers $\kappa = B/\mathfrak{p}$.*

Beweis. (i) Ist $x \in \mathfrak{p}$, so ist $x^{-1} \notin B$ und damit $x^{-1} \notin A$. Weil A ein Bewertungsring ist, folgt, dass $x \in A$, aber keine Einheit ist und damit $x \in \mathfrak{m}$. Schließlich ist wegen $A \neq B$ auch $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{p}$.

(ii) Aus (i) folgt, dass $\mathfrak{p} = \mathfrak{p} \cap A$ ein Primideal ist. Wegen $A \setminus \mathfrak{p} \subseteq B \setminus \mathfrak{p} = B^\times$ gilt $A_\mathfrak{p} \subseteq B$. Per Konstruktion ist das maximale Ideal von $A_\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{p}$ enthalten. Wegen $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{p}$ folgt Gleichheit.

(iii) Betrachte die natürliche Projektion $\pi : B \to \kappa$. Sei $x \in B \setminus \mathfrak{p}$. Ist $x \in A$ gilt $\pi(x) \in A/\mathfrak{p}$. Ist $x \notin A$, so gilt $\pi(x)^{-1} = \pi(x^{-1}) \in A/\mathfrak{p}$. □

Allgemein bezeichne im Folgenden $\mathfrak{m}_R$ immer das maximale Ideal eines lokalen Rings R.

Komposition von Bewertungen

Sei nun K ein Körper mit einer Bewertung v und R der dazugehörige Bewertungsring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und Restklassenkörper $\kappa = R/\mathfrak{m}$ und bezeichne π die Restklassenabbildung $R \to \kappa$. Angenommen, κ ist ausgestattet mit einer Bewertung $\overline{v}'$ und dem zugehörigen Bewertungsring $\overline{R'} \subset \kappa$. Wir definieren das Urbild dieses Bewertungsrings unter der Restklassenabbildung als

$$R' := \pi^{-1}(\overline{R'}) = \{x \in R \mid x \mod \mathfrak{m} \in \overline{R'}\}. \tag{2.2}$$

Es handelt sich um einen Unterring von R mit $\mathfrak{m} \subset R' \subset R$ und für $x' \in R'$ gilt

$$x' \in R'^{\times} \quad \Longleftrightarrow \quad x' \mod \mathfrak{m} \in \overline{R'}^{\times}.$$

Ferner ist $\operatorname{Quot}(R') = K$. Aus dem Kriterium für Bewertungsringe folgt leicht:

Proposition 2.1.11. *R' ist ein Bewertungsring von K, genannt* Kompositum *von R und $\overline{R'}$. Die dazugehörige Bewertung v' nennen wir* Komposition *von v und schreiben diese als $v' = \overline{v}' \circ v$.*

Proposition 2.1.10 liefert angewandt auf $A = R'$ und $B = R$ den folgende Zusammenhang:

$$\begin{array}{ccccc} & & K & & \\ & & \cup & & \\ \mathfrak{m} & \subset & R & \xrightarrow{\pi} & \kappa \\ \cap & & \cup & & \cup \\ \mathfrak{m}' & \subset & R' & \twoheadrightarrow R'/\mathfrak{m} \twoheadrightarrow & \kappa' = R'/\mathfrak{m}' \end{array}$$

Tatsächlich liefert wegen Proposition 2.1.10 (iii) und Satz 2.1.15 das beschriebene Vorgehen sogar alle Unterringe eines Bewertungsrings, die Bewertungsringe sind und den gleichen Quotientenkörper haben.

Theorem 2.1.12. *Sei R ein Bewertungsring mit Quotientenkörper K. Dann ist jeder Bewertungsring R', der ein Unterring von R ist und für den $\operatorname{Quot}(R') = K$ gilt, Kompositum von R und einem Bewertungsring des Restklassenkörpers κ.*

Definition 2.1.13. Sei Γ eine geordnete Gruppe und H eine Untergruppe. Wir nennen H *konvex*, wenn für alle $h, h' \in H, \gamma \in \Gamma$ gilt

$$h \leq \gamma \leq h' \Rightarrow \gamma \in H. \tag{2.3}$$

Bemerkung 2.1.14. Wir betrachten konvexe Untergruppen, da es genau die Bedingung (2.3) aus der Definition ist, die sicherstellt, dass auf dem Quotienten $\overline{\Gamma} = \Gamma/H$ eine wohldefinierte Struktur als total geordnete abelsche Gruppe existiert. Genauer wollen wir $\overline{\Gamma}_{\geq 0}$ als Bild von $\Gamma_{\geq 0}/H$ definieren, was bedeutet, dass wir für $g, g' \in \overline{\Gamma}$ genau dann sagen wollen, dass $g \geq g'$ gilt, wenn $g - g' \in \Gamma_{\geq 0}H$.

Diese Relation ist ganz offenbar translationsinvariant, reflexiv sowie transitiv. Seien nun $g, g' \in \overline{\Gamma}$. Da Γ total geordnet ist, gilt für ihre Repräsentanten $g_0, g_0' \in \Gamma$, dass $g_0 \geq g_0'$ oder $g_0' \geq g_0$ und damit auch für g und g'. Es bleibt somit nur noch die Antisymmetrie dieser Relation zu zeigen. Hier geht die Konvexität von H ein: Zu zeigen, dass aus $g \geq g'$ und $g' \geq g$ schon $g = g'$ folgen muss, bedeutet nichts anderes als die folgende Gleichheit zu beweisen

$$\Gamma_{\geq 0}H \cap \Gamma_{\leq 0}H = H.$$

Sei $\gamma \in \Gamma_{\geq 0}H \cap \Gamma_{\leq 0}H$. Dann existieren $\gamma_1 \in \Gamma_{\geq 0}, \gamma_2 \in \Gamma_{\leq 0}$ sowie $h_1, h_2 \in H$, sodass $\gamma = \gamma_1 + h_1 = \gamma_2 + h_2$. Dann gilt $\gamma_1 - \gamma_2 = h_2 - h_1 \in H$ und damit $0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_1 - \gamma_2$. Aus dem Konvexitäts-Axiom (2.3) folgt $\gamma_1 \in H$ und schließlich $\gamma \in H$.

Konvexität ist jedoch ebenfalls notwendig dafür, dass der Quotient eine Totalordnung ist (wobei es wieder nur die Antisymmetrie ist, über die man sich Gedanken machen muss). Angenommen $h' \geq \gamma \geq h$ mit $\gamma \in \Gamma$ und $h, h' \in H$. Dann gilt $h' - \gamma \in \Gamma_{\geq 0}H$ und $h - \gamma \in \Gamma_{\leq 0}H$. Damit ist die Klasse von γ in der „Restklassenordnung" sowohl ≥ 0 als auch ≤ 0. Ist die Relation also antisymmetrisch, muss die Klasse gleich 0 sein, was nichts anderes heißt als $\gamma \in H$ und das besagt genau das Konvexitätsaxiom.

Wir betrachten nun wieder einen Bewertungsring R mit Bewertung v und Restklassenkörper κ, auf dem eine Bewertung $\overline{v}'$ mit Bewertungsring $\overline{R}'$ gegeben sei. Wir bezeichnen ferner R' als das Kompositum von R und $\overline{R}'$ wie in (2.2) und v' als die zugehörige Bewertung. Damit lässt sich nun die folgende Behauptung über die Wertegruppen formulieren.

Satz 2.1.15. *Die Wertegruppe $\Gamma_{\overline{R'}}$ lässt sich auf natürliche Weise als Untergruppe von $\Gamma_{R'}$ auffassen und ist als solche eine konvexe Untergruppe, für die es einen natürlichen Isomorphismus geordneter Gruppen $\Gamma_{R'}/\Gamma_{\overline{R'}} \simeq \Gamma_R$ gibt.*

Beweis. Wir erinnern zunächst daran, dass wir die Wertegruppe von v mit $\Gamma_R = K^\times/R^\times$, die Wertegruppe von $\overline{v}'$ mit $\Gamma_{\overline{R'}} = K^\times/(\overline{R'})^\times$ und die Wertegruppe von v' mit $\Gamma_{R'} = K^\times/(R)'^\times$ identifizieren können. Wir haben eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen

$$0 \longrightarrow R^\times/(R')^\times \longrightarrow K^\times/(R')^\times \longrightarrow K^\times/R^\times \longrightarrow 0.$$

Daraus erhalten wir folgendermaßen eine kurze exakten Sequenz aller drei Wertegruppen: Die durch die Quotientenabbildung induzierte Abbildung $R^\times \to \kappa^\times$ ist surjektiv, weil R lokal ist. Da R' und $\overline{R'}$ ebenfalls lokal sind und der Homomorphismus $R' \to \overline{R'}$ surjektiv ist, ist auch $R'^\times \to \overline{R'}^\times$ surjektiv. Damit erhalten wir einen Isomorphismus

$$R^\times/(R')^\times \to \kappa^\times/\overline{R'}^\times$$

und die gewünschte kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \kappa^\times/\overline{R'}^\times \xrightarrow{\iota} K^\times/(R')^\times \xrightarrow{\pi} K^\times/R^\times \longrightarrow 0. \tag{2.4}$$

Insbesondere können wir damit $\Gamma_{\overline{R'}}$ als Untergruppe von $\Gamma_{R'}$ auffassen. Diese Sequenz spaltet aber selbst als Sequenz abelscher Gruppen im Allgemeinen nicht. Wir zeigen stattdessen, dass $\Gamma_{\overline{R'}}$ in (2.4) durch ι ordnungserhaltend auf eine konvexe Untergruppe von $\Gamma_{R'}$ abgebildet wird und die Struktur der Ordnung auf Γ_R auf die in Bemerkung 2.1.14 beschriebene Weise entsteht.

Wegen $R^\times/(R')^\times = \kappa^\times/\overline{R'}^\times$ gilt für alle $r_1, r_2 \in R^\times$

$$\overline{r}_1/\overline{r}_2 \in \overline{R'} \iff r_1/r_2 \in R',$$

wobei $\overline{r}_i \in \kappa^\times$ für $i = 1, 2$ die Bilder unter der Restklassenabbildung bezeichnen.

Sei nun $H = \Gamma_{\overline{R'}}$ und $\Gamma = \Gamma_{R'}$. Offenbar gilt $(\Gamma_R)_{\geq 0} = (K^\times/R^\times)_{\geq 0} = (R \setminus \{0\})/R^\times$ und

$$\begin{aligned}\Gamma_{\geq 0}H &= (K^\times/(R')^\times)_{\geq 0}H \\ &= ((R' \setminus \{0\})/(R')^\times)H \\ &= ((R' \setminus \{0\})R^\times)/(R')^\times \\ &= (R \setminus \{0\})/(R')^\times.\end{aligned}$$

Damit muss das Bild von $H = \Gamma_{\overline{R'}}$ in $\Gamma_{R'} = K^\times/(R')^\times$ konvex sein und die Quotiententotalordnung, die auf Γ_R induziert wird, ist die gleiche Ordnung, die auf der Wertegruppe von v von v' via der Wertegruppe von $\overline{v}'$ gegeben ist. □

Der Rang einer geordneten Gruppe

Offenbar ist die Vereinigung aller echter konvexer Untergruppen einer geordneten Gruppe durch Inklusion linear geordnet. Die Zahl

$$\sup\{n \mid \Delta_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \Delta_n \subsetneq \Gamma \text{ mit } \Delta_i \text{ konvexe Untergruppe}, i = 0, \ldots, n\} \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

bezeichnet damit nichts anderes als die Anzahl echter konvexer Untergruppen von Γ. Wir ordnen einer geordneten Gruppe in diesem Sinne die folgende Kenngröße zu.

Definition 2.1.16 (Rang). Sei Γ eine geordnete Gruppe. Der *Rang* von Γ ist die Anzahl echter konvexer Untergruppen von Γ. Wir notieren dies als $\operatorname{rk}(\Gamma)$. Ist v eine Bewertung auf einem Körper K so definieren wir den Rang von v als den Rang der Wertegruppe Γ_v und bezeichnen diesen mit $\operatorname{rk}(v)$.

Bemerkung 2.1.17. Ist $\{0\}$ die einzige echte konvexe Untergruppe von Γ, so hat Γ den Rang 1. Man kann zeigen, dass eine geordnete Gruppe Γ genau dann von Rang 1 ist, wenn sie ordnungsisomorph zu einer nicht-trivialen Untergruppe der additive Gruppe von $\mathbb{R}$ ist mit der kanonischen Ordnung induziert von $\mathbb{R}$ (Siehe [EP05, Prop. 2.1.1]). Es ist äquivalent dazu zu sagen, dass Γ *archimedisch* ist, also für $\alpha, \beta \in \Gamma$ und $\alpha > 0$ eine ganze Zahl n existiert mit $n\alpha > \beta$.

Sind Γ und Δ geordnete Gruppe, so lässt sich ihr direktes Produkt lexikographisch ordnen. Für $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ und $\delta, \delta' \in \Delta$ definiere:

$$(\gamma, \delta) \geq (\gamma', \delta') \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma > \gamma' \text{ oder } (\gamma = \gamma' \text{ und } \delta \geq \delta').$$

Offenbar ist $\{0\} \times \Delta$ eine konvexe Untergruppe von $\Gamma \times \Delta$, die ordnungsisomorph zu Δ ist. Die additive Gruppe der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ist geordnet und von Rang 1. Das lexikografische Produkt $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ oder allgemeiner das n-fache lexikografische Produkt $\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$ ist von Rang 2 bzw. n. Man kann dem direkten Produkt $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ jedoch eine andere Ordnung geben – sogar eine, die es zu einer geordneten Gruppe von Rang 1 macht, in dem man das Produkt beispielsweise mit $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{2} \subseteq \mathbb{R}$ identifiziert und die von $\mathbb{R}$ induzierte Ordnung annimmt.

Ist H eine konvexe Untergruppe einer geordneten Gruppe Γ, so ist der kanonische Morphismus $\Gamma \to \Gamma/H$ ordnungserhaltend. Ferner gilt

$$\operatorname{rk}(\Gamma) = \operatorname{rk}(H) + \operatorname{rk}(\Gamma/H).$$

Satz 2.1.15 zeigt, dass durch die Kompositums-Bildung gemäß (2.2) Bewertungen von höherem Rang entstehen können.

Beispiel 2.1.18. Sei nun $K = k((y))((x)) = \mathrm{Quot}(k((y))[[x]])$ für einen Körper k und $A = k[[x]]$. Wir betrachten die „x-adische"-Bewertung aus Beispiel 2.1.9 (ii) mit Bewertungsring $R = k((y))[[x]]$. Das maximale Ideal von R ist $\mathfrak{m} = xR$ und für den Restklassenkörper gilt somit $R/\mathfrak{m} \simeq k((y))$. Auf diesem Körper können wir die „y-adische"-Bewertung betrachten, die per Definition trivial auf k ist, mit dem Bewertungsring $\overline{R}' = k[[y]]$. Für die Wertegruppen dieser beiden Bewertungen gilt $\Gamma_R = x^{\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}$ und $\Gamma_{\overline{R}'} = y^{\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}$ und es lässt sich wie in (2.2) das Kompositum R' von R und $\overline{R}'$ bilden. Dann ist R' das Urbild von $k[[y]]$ unter der Restklassenabbildung $k((y))[[x]] \to K((y))$, also $R' = k[[y]][[x]] + x \cdot k((y))[[x]]$ und nach Proposition 2.1.11 handelt es sich um einen Bewertungsring von K. Die kurze exakte Sequenz

$$0 \to \Gamma_{\overline{R}'} \to \Gamma_{R'} \to \Gamma_R \to 0$$

aus Satz 2.1.15 spaltet und liefert $\Gamma_{R'} \cong \Gamma_R \times \Gamma_{\overline{R}'} \cong (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})_{\mathrm{lex}}$.

Sei K ein Körper und $A \subseteq K$ ein Unterring. Enthält ein Bewertungsring R von K den Ring A, so sagen wir R ist *zentriert* in A und wir nennen das Primideal $\mathfrak{m}_R \cap A$ von A das *Zentrum* von R in A. Die Menge der Bewertungsringe, die in A zentriert sind, bezeichnen wir mit

$$\mathrm{Val}_A(K) = \{R \mid R \text{ Bewertungsring von } K \text{ mit } A \subseteq R \subseteq K\}. \tag{2.5}$$

In Kapitel 3 wird diese Menge als topologischer Raum untersucht. Zunächst betrachten wir jedoch den Fall $\mathrm{Quot}\, A = \mathrm{Quot}\, R = K$. Proposition 2.1.10 (i) und (ii) liefert eine 1:1-Korrespondenz von Primidealen von A und Elementen von $\mathrm{Val}_A(K)$.

Korollar 2.1.19. *Sei A ein Bewertungsring mit Quotientenkörper K und $\mathrm{Val}_A(K)$ wie in (2.5). Dann sind die Abbildungen*

$$\begin{aligned} \mathrm{Spec}(A) &\to \mathrm{Val}_A(K), \quad \mathfrak{p} \mapsto A_{\mathfrak{p}} \\ \mathrm{Val}_A(K) &\to \mathrm{Spec}(A), \quad B \mapsto \mathfrak{m}_B \end{aligned}$$

wohldefinierte, inverse, inklusionsumkehrende Bijektionen.

Tatsächlich lassen sich Eigenschaften eines Bewertungsrings an seiner Wertegruppe ablesen.

Proposition 2.1.20. *Sei K ein Körper, v eine Bewertung auf K und $A = R_v$ der dazugehörige Bewertungsring sowie $\Gamma = \Gamma_v$ die Wertegruppe. Man betrachte die folgende Bedingung auf Teilmengen M von Γ :*

$$\gamma \in M, \delta \geq \gamma \Rightarrow \delta \in M. \tag{2.6}$$

Dann erhalten wir eine ordnungserhaltende Bijektion zwischen Teilmengen M von Γ, die (2.6) erfüllen und in $\Gamma_{\geq 0} = v(R \setminus \{0\})$ liegen und den Idealen $\mathfrak{a}$ von R via

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &\mapsto M(\mathfrak{a}) := v(\mathfrak{a} \setminus \{0\}) \\ \text{bzw.} \quad M &\mapsto \mathfrak{a}(M) := v^{-1}(M) \cup \{0\}. \end{aligned}$$

Beweis. Für alle Ideale $\mathfrak{a}$ von A gilt:

$$M(\mathfrak{a}) = \{\gamma \in \Gamma;\ \gamma \geq \inf_{x \in \mathfrak{a} \setminus \{0\}} v(x)\}.$$

Damit erfüllen diese Mengen die Bedingung (2.6). Ist $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$, so gilt $M(\mathfrak{a}) \subseteq M(\mathfrak{b})$. Ferner ist für für alle $M \subseteq \Gamma_{\geq 0}$, die (2.6) erfüllen, $\mathfrak{a}(M)$ per Definition einer Bewertung ein Ideal von A und für solche konvexen Untergruppen $M \subseteq N$ gilt offenbar $v^{-1}(M) \subseteq v^{-1}(N)$. Die beiden Abbildungen sind also wohldefiniert und inklusionserhaltend.

Es bleibt zu zeigen, dass sie invers zueinander sind. Zum einen gilt für alle M, dass $v(v^{-1}(M)) \subseteq M$ und es gilt Gleichheit, weil v surjektiv ist. Außerdem gilt offenbar $\mathfrak{a} \subseteq \{0\} \cup v^{-1}(v(\mathfrak{a} \setminus \{0\}))$. Ist andersrum $x \in v^{-1}(v(\mathfrak{a} \setminus \{0\}))$, so gilt $v(x) \in v(\mathfrak{a} \setminus \{0\})$ und es existiert ein $y \in \mathfrak{a}$ mit $v(y) = v(x)$. Das bedeutet, es existiert ein $u \in A^\times$ mit $x = uy$. Es folgt $x \in Ay \subseteq \mathfrak{a}$. □

Sei A ein Bewertungsring mit Quotientenkörper K und $\Gamma = \Gamma_A$ die assoziierte Wertegruppe. Dann bezeichne

$$\mathcal{I}_A = \{\Delta \mid \ \Delta \text{ konvexe Untergruppe von } \Gamma\} \tag{2.7}$$

die Menge der konvexen Untergruppen von Γ.

Satz 2.1.21. *Sei K ein Körper und v eine Bewertung auf K. Sei A der Bewertungsring von v, Γ die Wertegruppe und seien $\mathcal{R} = \mathrm{Val}_A(K)$ und $\mathcal{I} = \mathcal{I}_A$ definiert wie in (2.5) bzw. (2.7). Dann sind die Abbildungen*

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \to \mathcal{R}, &\quad \Delta \mapsto A(\Delta) \\ \mathcal{R} \to \mathcal{I}, &\quad B \mapsto v(B^\times) \end{aligned}$$

wohldefinierte, inverse, ordnungserhaltende Bijektionen, wobei $A(\Delta)$ den Bewertungsring zu der Bewertung $K \xrightarrow{v} \Gamma \to \Gamma/\Delta$ bezeichne.

Beweis. Sei $B \in \mathcal{R}$ und damit ein Bewertungsring. Wir können annehmen, dass $\Gamma_B = K^\times/B^\times$. Nach Theorem 2.1.12 ist $v = v_B \circ \overline{v}$, wobei $\overline{v}$ eine Bewertung auf dem Restklassenkörper von v_B bezeichne. Sei $\overline{A}$ der dazugehörige Bewertungsring und $H := \Gamma_{\overline{A}}$ die Wertegruppe. Dann ist nach Satz 2.1.15

$$H = \ker(\lambda : \Gamma_A \to \Gamma_B) = B^\times/A^\times = v(B^\times)$$

eine konvexe Untergruppe von $\Gamma = \Gamma_A$. Damit ist die zweite Abbildung wohldefiniert. Außerdem sagt der Satz, dass es einen natürlichen Isomorphismus $\Gamma_B = \Gamma/H$ gibt, das heißt $v_B = \lambda \circ v$ (bis auf Äquivalenz) gilt und damit ist B eindeutig bestimmt. Also ist $A(v(B^\times)) = B$. Andersrum ist für jedes $\Delta \in \mathcal{I}$ die Abbildung $K \xrightarrow{v} \Gamma \to \Gamma/\Delta$ eine Bewertung auf K, dessen Bewertungsring A enthält, weil $\Gamma \to \Gamma/\Delta$ nach Bemerkung 2.1.14 ein Homomorphismus geordneter Gruppen ist. Damit ist auch die erste Abbildung wohldefiniert und offenbar gilt $v(A(\Delta)^\times) = \Delta$. Die beiden Abbildungen sind außerdem offenbar inklusionserhaltend. Sind $B, B' \in \mathcal{R}$ mit $B \subseteq B'$, so gilt $v(B^\times) \subseteq v(B'^\times)$. Sind $\Delta, \Delta' \in \mathcal{I}$ mit $\Delta \subseteq \Delta'$, dann folgt $\Gamma/\Delta' \subset \Gamma/\Delta$ und damit $A(\Delta) \subseteq A(\Delta')$. □

Der Rang der zu einem Bewertungsring A in K korrespondierenden Wertegruppe $\Gamma = K^\times/A^\times$ entspricht damit der Anzahl der über A liegenden Bewertungsringen (bzw. den (Äquivalenzklassen von) Bewertungen v auf K mit $v(A) \geq 0$). Insbesondere ist also Γ genau dann von Rang 1, wenn A maximal ist.

Zusammen mit Korollar 2.1.19 erhalten wir außerdem das folgende Resultat

Lemma 2.1.22. *Sei K ein Körper und v eine Bewertung auf K mit dem Bewertungsring A und der Wertegruppe Γ. Dann gibt es eine ordnungserhaltende 1-1-Korrespondenz zwischen den konvexen Untergruppen Δ von Γ_v und den Primidealen $\mathfrak{p}$ von A.*

Die Primideale eines Bewertungsrings A in K sind somit total geordnet und der Rang der korrespondierenden Wertegruppe $\Gamma = K^\times / A^\times$ entspricht damit der Krull-Dimension des Rings A, also

$$\mathrm{rk}(\Gamma) = \dim A.$$

2.2 Komplettierung und lokale Körper

Sei K ein Körper mit einer nicht-trivialen Bewertung $v : K \to \Gamma \cup \{\infty\}$. Es ist möglich, in diesem allgemeinen Fall eine Komplettierung von K bezüglich v anzugeben: Sei κ die kleinste Kardinalzahl, die als Index einer Folge γ_ν $(\nu < \kappa, \gamma_\nu \in \Gamma)$ dient, die „kofinal" in Γ ist, d.h. für jedes $\delta \in \Gamma$ existiert ein $\nu < \kappa$ mit $\delta < \gamma_\nu$. Da die rationalen Zahlen dicht in $\mathbb{R}$ liegen, wird dies für jede Untergruppe Γ von $\mathbb{R}$ von $\kappa = \aleph_0$ erfüllt. Wir können nun Folgen $(a_\nu)_{\nu<\kappa}$ *von Länge* κ betrachten und einen Konvergenzbegriff, sowie den Begriff einer Cauchy-Folge definieren. Wir sagen

$$\lim_{\nu<\kappa} a_\nu = a,$$

wenn für jedes $\gamma \in \Gamma$ ein $\nu_0 < \kappa$ existiert, sodass für alle $\nu \geq \nu_0$ gilt

$$v(a - a_\nu) > \gamma.$$

Wir sagen, $(a_\nu)_{\nu<\kappa}$ ist eine *Cauchy-Folge*, wenn für jedes $\gamma \in \Gamma$ ein $\nu_0 < \kappa$ existiert, sodass für alle $\nu, \mu \geq \nu_0$ gilt

$$v(a_\mu - a_\nu) > \gamma.$$

Der Körper K heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in K konvergiert. Schränken wir uns auf den Fall $\kappa = \aleph_0$ ein, so entspricht dies den üblichen Definitionen von Cauchy-Folgen und Vollständigkeit.

Theorem 2.2.1. *Jeder bewertete Körper (K, v) besitzt eine (bis auf Isomorphismus) eindeutige bewertete Erweiterung $(\widehat{K}, \widehat{v})$, die vollständig ist und in der K dicht ist.*
Die Erweiterung $(\widehat{K}, \widehat{v})$ heißt Komplettierung von (K, v).

Eine Skizze der Existenz und Eindeutigkeit einer solchen Erweiterung $(\widehat{K}, \widehat{v})$ findet sich in [EP05, §2.4]. Es sei bemerkt, dass die Komplettierung von Bewertungen höheren Ranges allgemein nicht das Henselsche Lemma erfüllen. In dieser Arbeit werden wir diesen allgemeinen Begriff von Vollständigkeit jedoch nicht benötigen.

Die Dichtheit von K in $\widehat{K}$ hat zur Konsequenz, dass die Restklassenkörper $\kappa(\widehat{v})$ und $\kappa(v)$ sowie die Wertegruppe $\Gamma_{\widehat{v}} = v(\widehat{K}^\times)$ und $\Gamma_v = v(K^\times)$ kanonisch isomorph ist (siehe [EP05, Thm. 2.4.4]).

Beispiel 2.2.2 (p-adischer Zahlkörper)**.** Sei p eine Primzahl. Man betrachte die in Beispiel 2.1.9 (i) definierte p-adische Bewertung v_p auf $\mathbb{Q}$. Diese Bewertung induziert einen Absolutbetrag, der definiert wird als $|a|_p = p^{-v_p(a)}$ für $a \in \mathbb{Q}^\times$. Die Komplettierung von $(\mathbb{Q}, v_p)$ wird durch $\mathbb{Q}_p$ bezeichnet und *p-adischer Zahlkörper* genannt. Der Bewertungsring von $\mathbb{Q}_p$, bezeichnet mit $\mathbb{Z}_p$, wird Ring der p-adischen Zahlen genannt und ist der Abschluss von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}_p$. Der Restklassenkörper ist $\mathbb{F}_p$.

Bewertungen von Rang 1 korrespondieren eindeutig mit (nicht-archimedischen) Absolutbeträgen. Ein solcher Absolutbetrag $|\cdot|$ auf einem Körper K lässt sich nun nicht nur eindeutig auf den vervollständigten Körper $\widehat{K}$ fortsetzen, sondern auch von einem vollständigen Körper eindeutig auf dessen algebraische Erweiterungen.

Satz 2.2.3. *Sei K vollständig bzgl. der Bewertung $|\cdot|$. Dann besitzt $|\cdot|$ auf jede algebraische Erweiterung L/K eine eindeutige Bewertungsfortsetzung, welche im Fall, dass L/K endlich ist, gegeben ist durch*

$$|\alpha| = \sqrt[n]{|\ N_{L/K}(\alpha)\ |},$$

wobei $n := [L : K]$. In diesem Fall ist L wieder vollständig.

Beweis. Siehe [Neu06, Thm. 4.8]. □

2.3 Fortsetzung von Bewertungen

Nun soll es um die Frage gehen, ob bzw. auf wie viele Weisen sich eine Bewertung auf einen beliebigen Oberkörper fortsetzen lässt. Es bezeichne K/k eine Körpererweiterung und $v : k \to \Gamma_v \cup \{\infty\}$ eine Bewertung. Wir fragen nach der Existenz einer Bewertung $w : K \to \Gamma_w \cup \{\infty\}$, sodass das folgende Diagramm kommutiert,

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "w"] & \Gamma_w \cup \{\infty\} \\
k \arrow[u, dash] \arrow[r, "v"] & \Gamma_v \cup \{\infty\} \arrow[u, "\lambda"']
\end{tikzcd}$$

wobei λ einen injektiven Homomorphismus geordneter Gruppen bezeichne. Das heißt, es gilt $w|_k = v$ und für die Bewertungsringe gilt $R_v = R_w \cap k$. Wir nennen w eine *Fortsetzung* von v. Erfüllen die Bewertungsringe $\mathfrak{o}$ und R von k bzw. K diese Eigenschaften, so nennen wir R ebenfalls eine *Fortsetzung* oder synonym auch *Erweiterung* von $\mathfrak{o}$ und wir schreiben $(k, \mathfrak{o}) \subseteq (K, R)$. Bezeichnen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{m}$ die maximalen Ideale von $\mathfrak{o}$ bzw. R, dann gilt

$$\mathfrak{m} \cap k = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{p}$$
$$R^\times \cap k = R^\times \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{o}^\times.$$

Im Folgenden werden wir die Bewertungsringe von k immer als $\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{o}_v$ und die Bewertungsringe von K als R bzw. R_w notieren.

Existenz von Erweiterungen

Sind R und S lokale Ringe, so sagen wir R *dominiert* S, wenn

$$S \subseteq R \text{ und } \mathfrak{m}_R \cap S = \mathfrak{m}_S.$$

Dann schreiben wir $S \preceq R$. Nehmen wir an, dass $S \subseteq R$, so gilt genau dann $S \preceq R$, wenn $\mathfrak{m}_S \subseteq \mathfrak{m}_R$. Dominiert R den Ring S, so erhalten wir ferner eine Inklusion der Restklassenkörper $S/\mathfrak{m}_S \subseteq R/\mathfrak{m}_R$.

Beispiel 2.3.1. (i) Ist A ein noetherscher lokaler Ring und $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_A$, dann ist die Kompletting von A in der $\mathfrak{m}$-Topologie $\widehat{A} = \varprojlim A/\mathfrak{m}^n$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}\widehat{A}$ und dominiert damit A.

(ii) Sind A und B Integritätsringe mit $A \subseteq B$. Dann dominiert für jedes Primideal $\mathfrak{q}$ von B der lokale Ring $B_{\mathfrak{q}}$ den lokalen Ring $A_{\mathfrak{p}}$ für $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$.

Folgender Satz zeigt, dass Bewertungsringe mit Quotientenkörper K genau diejenigen lokalen Ringe in K sind, die maximal bezüglich lokaler Dominanz sind. Wir werden sehen, dass es eine direkte Konsequenz dieser Aussage ist, dass es zu jeder Bewertung v auf k mindestens eine Fortsetzung w auf K gibt.

Satz 2.3.2 (Chevalley)**.** *Sei K ein Körper und $A \subseteq K$ ein Unterring sowie $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A. Dann gibt es einen Bewertungsring R von K sodass*

$$A \subseteq R \quad \textit{und} \quad \mathfrak{m}_R \cap A = \mathfrak{p}.$$

Beweis. Ohne Einschränkung sei A lokal mit $\mathfrak{m}_A = \mathfrak{p}$. Setze

$$\mathcal{F} = \{B \mid \ A \subseteq B \subseteq K \text{ Unterring mit } \mathfrak{p}B \neq B\}.$$

Offenbar gilt $A \in \mathcal{F}$ und für eine (per Inklusion) total geordnete Teilmenge $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$ gilt

$$\bigcup_{L \in \mathcal{L}} L \in \mathcal{F}.$$

Damit ist das Lemma von Zorn anwendbar und liefert die Existenz eines bezüglich Inklusion maximalen Elements R von $\mathcal{F}$. Weil $\mathfrak{p}R$ ein echtes Ideal von R ist, gibt es ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ von R mit $\mathfrak{p}R \subseteq \mathfrak{m}$. Es gilt $R \subseteq R_{\mathfrak{m}}$ und $R_{\mathfrak{m}} \in \mathcal{F}$. Der Ring R ist schon maximal in $\mathcal{F}$, es muss also $R = R_{\mathfrak{m}}$ gelten und damit ist R lokal. Da A lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}$ ist, folgt $\mathfrak{m}_R \cap A = \mathfrak{p}$. Es bleibt nachzuprüfen, dass R ein Bewertungsring ist. Betrachte $x \in K$. Wir wollen $x \notin R$ und $x^{-1} \notin R$ zum Widerspruch führen. Da $R[x] \notin \mathcal{F}$, aber offenbar ein Unterring von K ist, der A enthält, folgt $\mathfrak{p}R[x] = R[x]$. Das bedeutet, es existiert eine Relation der Form

$$1 = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad \text{mit } a_i \in \mathfrak{p}R.$$

Da $1 - a_0$ eine Einheit in R ist, führt die Multiplikation mit dem Inversen auf eine Relation der Form

$$(*) \quad 1 = b_1 x + \cdots + b_n x^n,$$

dessen Koeffizienten nun in $\mathfrak{m}$ liegen. Wir wählen unter allen solchen Relationen diejenige mit dem kleinsten Grad. Analog finden wir eine Relation

$$(**) \quad 1 = c_1 x^{-1} + \cdots + c_m x^{-m} \quad \text{mit } c_i \in \mathfrak{m},$$

die auch minimal gewählt werden kann. Ist $n \geq m$ lässt sich $(**)$ mit $b_n x^n$ multiplizieren und auf $(*)$ addieren, sodass eine Relation der Form $(*)$ entsteht mit Grad $\leq n - 1$, was ein Widerspruch zur Minimalität darstellt. Ist n echt kleiner als m, entsteht der gleiche Widerspruch, wenn man die Rollen von x und x^{-1} tauscht. Damit folgt die Behauptung. □

Ist K/k eine Körpererweiterung und R ein Bewertungsring von K, so ist $\mathfrak{o} = R \cap k$ ein Bewertungsring von k und R eine Erweiterung von $\mathfrak{o}$. Andersrum gilt

Satz 2.3.3. *Sei K/k eine Körpererweiterung und $\mathfrak{o}$ ein Bewertungsring von k. Dann gibt es eine Erweiterung R von $\mathfrak{o}$ in K.*

Beweis. Weil $\mathfrak{o}$ ein Unterring von K ist, gibt es nach dem Satz von Chevalley 2.3.2 einen Bewertungsring R von K mit $\mathfrak{o} \subseteq R$, sodass $\mathfrak{m}_R \cap \mathfrak{o}$ das maximale Ideal von

$\mathfrak{o}$ ist. Weil $R \cap k$ und $\mathfrak{o}$ Bewertungsringe mit dem gleichen maximalen Ideal sind, müssen sie schon gleich sein. □

Es lassen sich ferner die folgenden Konsequenzen aus Satz 2.3.2 ziehen.

Korollar 2.3.4. *(i) Jeder Bewertungsring R ist ganzabgeschlossen in* $\operatorname{Quot} R$.

(ii) Sei K ein Körper, A ein Unterring von K und B der ganze Abschluss in K. Dann ist B der Schnitt aller Bewertungsringe von K, die A enthalten.

Wir betrachten nun eine Erweiterung $(k, \mathfrak{o}) \subseteq (K, R)$. Die Bewertungsringe $\mathfrak{o}$ und R korrespondieren mit Bewertungen v bzw. w mit Wertegruppen $\Gamma_v = v(k^\times)$ und $\Gamma_w = w(K^\times)$, die wir wie in Abschnitt 2.1 mit $k^\times / \mathfrak{o}^\times$ bzw. $K^\times / R^\times$ identifizieren. Die verkettete Abbildung

$$k^\times \hookrightarrow K^\times \to K^\times / R^\times = \Gamma_w$$

hat den Kern $R^\times \cap k = \mathfrak{o}^\times$, nach dem Homomorphiesatz gilt also

$$\Gamma_v = k^\times / \mathfrak{o}^\times \hookrightarrow \Gamma_w = K^\times / R^\times$$

und wir können Γ_v als geordnete Untergruppe von Γ_w auffassen. Wir bezeichnen $e := e(w/v) = (\Gamma_w : \Gamma_v)$ als den *Verzweigungsindex* dieser Erweiterung.

Der Kern $\mathfrak{o} \cap \mathfrak{m}_R$ der verketteten Abbildung

$$\mathfrak{o} \hookrightarrow R \twoheadrightarrow \kappa(w)$$

entspricht genau dem maximalen Ideal von $\mathfrak{o}$. Dies induziert eine injektive Abbildung vom Restklassenkörper von v in den Restklassenkörper von w, sodass $\kappa(v)$ als Teilkörper $\kappa(w)$ aufgefasst werden kann. Wir bezeichnen $f := f(w/v) = [\kappa(w) : \kappa(v)]$ als den *Restklassengrad* von w über v.

Restklassengrad und Verzweigungsindex sind Elemente von $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Beispielsweise gilt für eine Komplettierung $(\widehat{K}, \widehat{v})$ über dem bewerteten Körper (K, v) mit Rang 1, dass $e(\widehat{v}/v) = f(\widehat{v}/v) = 1$.

Nun gibt es folgenden Zusammenhang zwischen den Wertegruppen $\Gamma_v \subseteq \Gamma_w$ und den Restklassenkörpern $\kappa(v) \subseteq \kappa(w)$.

Lemma 2.3.5. *Sei $(k, \mathfrak{o}) \subseteq (K, R)$ eine Erweiterung mit den korrespondierenden Bewertungen v und w auf k bzw. K. Seien $\omega_1, \ldots, \omega_f \in R$ und $\pi_1, \ldots, \pi_e \in K^\times$ sodass*

(i) die Restklassen $\overline{\omega}_1, \ldots, \overline{\omega}_f$ linear unabhängig über $\kappa(v)$ sind;

(ii) die Werte $w(\pi_1), \ldots, w(\pi_e)$ Repräsentanten verschiedener Nebenklassen von Γ_w / Γ_v sind.

Dann gilt für alle $a_{ij} \in k$,

$$w\left(\sum_{i=1}^{f}\sum_{j=1}^{e} a_{ij}\omega_i\pi_j\right) = \min\{w(a_{ij}\omega_i\pi_j) \mid 1 \le i \le f, 1 \le j \le e\}.$$

Ferner sind die Produkte $\{\omega_i\pi_j \mid i = 1, \ldots, f, j = 1, \ldots, e\}$ linear unabhängig über k.

Beweis. Seien $a_{ij} \in k$ und nicht alle 0 und wähle $I \in \{1, \ldots, f\}$ und $J \in \{1, \ldots, e\}$, sodass $w(a_{IJ}\pi_J)$ minimal ist unter allen $w(a_{ij}\pi_j)$. Das Minimum kann wegen Voraussetzung (ii) nur genau einmal angenommen werden, d.h. $w(a_{IJ}\pi_J) < w(a_{ij}\pi_j)$ für $j \neq J$. Sei nun $z = \sum_{i=1}^{f} \sum_{j=1}^{e} a_{ij}\omega_i\pi_j$ und bezeichne die maximalen Idealen von $\mathfrak{o}$

und R mit $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{m}$. Angenommen $w(z) > \min\{w(a_{ij}\omega_i\pi_j) \mid 1 \leq i \leq f, 1 \leq j \leq e\}$. Dann gilt $z(a_{IJ}\pi_J)^{-1} \in \mathfrak{m}$ sowie $a_{ij}\pi_j(a_{IJ}\pi_J)^{-1} \in \mathfrak{m}$ für alle $j \neq J$. Es folgt schließlich, dass

$$\sum_{i=1}^{f} a_{iJ}a_{IJ}^{-1}\omega_i \in \mathfrak{m}$$

und damit

$$\sum_{i=1}^{f} \overline{a_{iJ}a_{IJ}^{-1}}\,\overline{\omega_i} = 0,$$

was ein Widerspruch zur Voraussetzung (i) darstellt. □

Algebraische Erweiterungen

Die folgende Aussage ist eine direkte Konsequenz von Lemma2.3.5.

Korollar 2.3.6. *Sei $(k, v) \subseteq (K, w)$ und $n = [K : k]$. Dann sind der Verzweigungsindex $e(w/v)$ und der Restklassengrad $f(w/v)$ endlich und $e(w/v)f(w/v) \leq n$.*

Mit anderen Worten ist für eine solche endliche Erweiterung der Quotient Γ_w/Γ_v der beiden Wertegruppen sowie die Restklassenerweiterung $\kappa(w)/\kappa(v)$ endlich. Allgemeiner gilt für algebraische Erweiterungen die folgende Aussage.

Satz 2.3.7. *Sei K/k algebraisch und $(k, v) \subseteq (K, w)$. Dann gilt:*

(i) Γ_w/Γ_v ist eine Torsionsgruppe.

(ii) Γ_w und Γ_v besitzen den gleichen Rang, d.h. $rk(v) = rk(w)$.

(iii) $\kappa(w)$ ist eine algebraische Erweiterung über $\kappa(v)$.

Sind R und R' Bewertungsringe von K, die Erweiterungen des Bewertungsrings $\mathfrak{o}$ von v sind, dann folgt aus $R' \subseteq R$ schon, dass $R' = R$.

Beweis. (i) Sei $\alpha \in K^\times$ und $\gamma = w(\alpha) \in \Gamma_w$. Setze $M = k(\alpha)$ und bezeichne Γ das Bild von $M^\times$ unter der Einschränkung von w auf M. Mit vorherigem Korollar ist Γ/Γ_v endlich. Damit existiert für $\gamma = w|_M(\alpha)$ ein $n \in \mathbb{N}$ sodass $n\gamma \in \Gamma_v$.

(ii) Weil Γ_w/Γ_v eine Torsionsgruppe ist, liefert $\Delta \mapsto \Delta \cap \Gamma_v$ eine bijektive, inklusionserhaltende Korrespondenz der konvexen Untergruppen von Γ_w und Γ_v.

(iii) Sei M gewählt wie im Beweis von (i) und setze $\mathcal{O} = R_w \cap M$ und $w|_M = \widetilde{w}$. Nach vorherigem Korollar ist dann $\kappa(\widetilde{w})/\kappa(v)$ endlich und $\overline{\alpha} \in \kappa(\widetilde{w}) \subseteq \kappa(w)$ algebraisch über $\kappa(v)$. □

Ist K/k eine algebraische Erweiterung, so ist die eindeutige Fortsetzung der trivialen Bewertung von k auf K ist die triviale Bewertung auf K. Das hat zur Folge, dass $\mathrm{Val}_k(K)$, d.h. die Menge der Bewertungen auf K, die auf k trivial sind, für algebraische Erweiterungen K/k nur aus der trivialen Bewertung besteht.

Satz 2.3.8. *Sei K/k eine algebraische Erweiterung mit endlichem Separabilitätsgrad und v ein Bewertung auf k. Dann ist die Anzahl von Fortsetzungen von v auf K endlich und genauer gilt*

$$\#\,\mathrm{Val}_v(K) \leq [K : k]_s,$$

wobei $[K : k]_s$ den Separabilitätsgrad von K/k bezeichne.

Beweis. Siehe [EP05, Thm. 3.2.9]. □

Insbesondere gibt es also im Fall einer rein inseparablen Erweiterung genau eine Fortsetzung.

Mit diesem Satz lässt sich nun die folgende Lokalisierungs-Eigenschaft für den ganzen Abschluss eines Bewertungsrings in einer algebraischen Erweiterung folgern.

Satz 2.3.9. *Sei K/k eine algebraische Erweiterung, $\mathfrak{o}$ ein Bewertungsring von k und $\mathcal{O}$ der ganze Abschluss sowie R eine Erweiterung von $\mathcal{O}$ in K. Ist $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_R \cap \mathcal{O}$, dann gilt $R = \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$.*

Beweis. Es ist nur $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \supseteq R$ zu zeigen. Sei $\alpha \in R$ und $M = k(\alpha)$. Bezeichne $\mathcal{O}' = \mathcal{O} \cap M$, $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p} \cap M$, $R' = R \cap M$ und $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}_R \cap M$. Dann ist $\mathcal{O}'$ der ganze Abschluss von $\mathfrak{o}$ in M und entspricht dem Schnitt über alle Erweiterungen von $\mathfrak{o}$ in M nach Korollar 2.3.4, wobei es davon nach Satz 2.3.8 nur endlich viele gibt. Wegen $\mathfrak{p}' = \mathfrak{m}'_R \cap \mathcal{O}'$ gilt $R' = \mathcal{O}'_{\mathfrak{p}'}$. Damit existieren $a, b \in \mathcal{O}'$ mit $b \notin \mathfrak{p}'$ sodass $\alpha = ab^{-1} \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$. □

Sei K/k nun eine beliebige endliche Körpererweiterung von Grad n sowie v eine Bewertung auf k. Satz 2.3.8 sagt, dass $\#\mathrm{Val}_v(K) \leq n$ und wir haben ebenfalls bereits gesehen, dass $e(w/v)f(w/v) \leq n$ für alle Fortsetzungen w von v. Es gilt jedoch sogar noch mehr, nämlich

$$\sum_{w \in \mathrm{Val}_v(K)} e(w/v)f(w/v) \leq n. \tag{2.8}$$

Diese Ungleichung nennt sich *fundamentale Ungleichung* und im Fall (normierter) diskreter Bewertungen liegt Gleichheit vor (siehe [EP05, §3.2]).

Transzendente Erweiterungen

Es sollen nun die Fortsetzungen einer Bewertung v auf k untersucht werden, wenn K/k eine Erweiterung von positiven Transzendenzgrad ist. Dazu betrachten wir zunächst den einfachsten Fall.

Beispiel 2.3.10. (Bewertungen auf $k(X)$) Sei k ein Körper, Γ eine Untergruppe einer geordneten Gruppe Γ' und $\gamma' \in \Gamma'$ sowie $v : k \to \Gamma \cup \{\infty\}$ eine Bewertung auf k. Definiere zunächst für $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in k[X]$ die Abbildung

$$w(f) := \begin{cases} \infty & \text{wenn } f = 0, \\ \min\limits_{0 \leq i \leq n} \{v(a_i) + i\gamma'\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $f, g \in k[X] \setminus \{0\}$ sei $w(f/g) = w(f) - w(g)$. Wir stellen nun die folgende Behauptung auf: Die obige Abbildung definiert eine Bewertung

$$w : k(X) \to \Gamma' \cup \{\infty\}$$

auf $k(X)$, die v fortsetzt.

Um dies zu zeigen, betrachte $f, g \in k[X] \setminus \{0\}$. Sei $n = \max\{\deg(f), \deg(g)\}$ und man schreibe $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ und $g = \sum_{i=0}^n b_i X^i$. Dann ist

$$\begin{aligned} v(a_i + b_i) + i\gamma' &\geq \min\{v(a_i), v(b_i)\} + i\gamma' \\ &= \min\{v(a_i) + i\gamma', v(b_i) + i\gamma'\} \\ &\geq \min\{w(f), w(g)\} \end{aligned}$$

und damit $w(f + g) \geq \min\{w(f), w(g)\}$. Die Bedingung $w(fg) = w(f) + w(g)$ für $f, g \in k[X] \setminus \{0\}$ ist technisch aufwendiger nachzuprüfen und soll hier übersprungen werden. Damit lässt sich die Wohldefiniertheit von $w : k(X) \to \Gamma' \cup \{\infty\}$

zeigen: Ist $f/g = f'/g'$, so gilt $fg' = f'g$ und damit $w(f/g) = w(f) - w(g) = w(f') - w(g') = w(f'/g')$. Es bleibt für beliebe Elemente $h, h' \in k(X)$ zu zeigen, dass $w(h + h') \geq \min\{w(h), w(h')\}$ und $w(hh') = w(h) + w(h')$. Das folgt nun aber direkt aus dem schon betrachteten Fall. Schreibe $h = f/g$ und $h' = f'/g$ mit $f, f', g \in k[X] \setminus \{0\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} w(h+h') &= w(f+f') - w(g) \\ &\geq \min\{w(f), w(f')\} - w(g) \\ &= \min\{w(f) - w(g), w(f') - w(g)\} \\ &= \min\{w(h), w(h')\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} w(hh') &= w(ff') - w(g^2) \\ &= w(f) - w(g) + w(f') - w(g) \\ &= w(h) + w(h'). \end{aligned}$$

Schließlich sieht man sofort, dass $w|_k = v$.

Man kann zeigen, dass es genau eine solche Erweiterung w auf $k(X)$ von v gibt, sodass $w(X) = 0$ und $\overline{X}$ transzendent über $\kappa(v)$ ist. Das ist genau der Fall $\gamma' = 0$ in obiger Konstruktion. Für dieses w ist $\kappa(w) = \kappa(v)(\overline{X})$ und $\Gamma = \Gamma'$. Man nennt diese Bewertung *Gauß-Erweiterung* von v von k in den rationalen Funktionenkörper $k(X)$. Allgemeiner gilt sogar das folgende Korollar.

Korollar 2.3.11. *Angenommen $v : K \to \Gamma \cup \{\infty\}$ ist eine Bewertung auf dem Körper K und Γ eine Untergruppe einer geordneten Gruppe Γ' sowie $\gamma' \in \Gamma'$ keine Torsion im Quotienten Γ'/Γ. Dann gibt es genau eine Bewertung w auf $K(X)$ mit $w(X) = \gamma'$, die v fortsetzt . Für dieses w gilt $\kappa(w) = \kappa(v)$ und $w(k(X)^\times) = \Gamma \oplus \mathbb{Z}\gamma'$.*

Beweis. Siehe [EP05, Korollar 2.2.3]. □

Wir erinnern kurz an die folgenden Bezeichnungen bzw. Aussagen: Der Transzendenzgrad einer Körpererweiterung K/k ist die Mächtigkeit einer (bzw. aller) Transzendenzbasen von K/k und wird als $\operatorname{trdeg}(K/k)$ notiert. Eine Transzendenzbasis von K/k bezeichnet eine über k algebraisch unabhängige Teilmenge $\mathcal{J}$ von K, die maximal in K bezüglich dieser Eigenschaft ist. Algebraische Erweiterungen haben entsprechend Transzendenzgrad 0 und beispielsweise gilt für den Funktionenkörper $k(X)$ über k, dass $\operatorname{trdeg}(k(X)/k) = 1$.

Wir betrachten ausschließlich Erweiterungen K/k mit $\operatorname{trdeg}(K/k) < \infty$. Wir führen zunächst eine invariante abelscher Gruppen ein, die in Zusammenhang mit dem Rang einer geordneten Gruppe steht.

Definition 2.3.12. Sei G eine abelsche Gruppe. Dann ist $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Wir definieren den *rationalen Rang von G* als

$$\operatorname{rr}(G) = \dim_{\mathbb{Q}} G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

Sei v eine Bewertung. Der *rationale Rang von v* sei definiert als der rationale Rang der Wertegruppe Γ_v und mit $\operatorname{rr}(v)$ bezeichnet.

Für eine abelsche Gruppe G gilt genau dann $\operatorname{rr}(G) = 0$, wenn G eine Torsionsgruppe ist, weil nur dann $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ trivial ist. Ist G die Wertegruppe einer Bewertung

v, so ist G total geordnet und der rationale Rang ist genau dann 0, wenn $G = \{0\}$, d.h. wenn v die triviale Bewertung ist.

Sei G eine abelsche Gruppe und H eine Untergruppe von G. Dann ist

$$0 \to H \to G \to G/H \to 0$$

exakt. Da $\mathbb{Q}$ ein flacher $\mathbb{Z}$-Modul ist, ist

$$0 \to H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to (G/H) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to 0$$

ebenfalls exakt. Es gilt also

$$\mathrm{rr}(G) = \mathrm{rr}(H) + \mathrm{rr}(G/H).$$

Wir wollen uns nun überlegen wie sich die Elemente von $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ repräsentieren lassen. Seien dazu $g_1, \ldots, g_r \in G$ und $a_1/b_1, \ldots, a_r/b_r \in \mathbb{Q}$. Diese Brüche lassen sich auf den gleichen Nenner $n \in \mathbb{N}$ bringen und damit für alle $i = 1, \ldots, r$ darstellen als $a_i/b_i = c_i/n$ für ein passendes $c_i \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$g_1 \otimes \frac{a_1}{b_1} + \cdots + g_r \otimes \frac{a_r}{b_r} = g_1 \otimes \frac{c_1}{n} + \cdots + g_r \otimes \frac{c_r}{n} = (c_1 g_1 + \cdots + c_r g_r) \otimes \frac{1}{n}. \quad (2.9)$$

Damit hat jedes Element von $G \oplus_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/$ eine Repräsentation der Form $g \otimes 1/n$. Sei nun G eine geordnete Gruppe und $\geq$ die (totale) Ordnung auf G. Damit erhalten wir eine Ordnung auf $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/$ definiert durch

$$g \otimes \frac{1}{n} \geq g' \otimes \frac{1}{m} \quad \Longleftrightarrow \quad mg \geq ng'.$$

Offenbar muss man sich noch überlegen, warum diese Ordnung wohldefiniert ist. Betrachtet man nochmals (2.9) und nimmt an, die Brüche seien bereits gekürzt gewählt, so fällt auf, dass für $b := \mathrm{kgV}(b_1, \ldots, b_r)$ gilt $n = k \cdot b$ und $c_i = a_i n / b_i$, also $g = k((a_1 b/b_1) g_1 + \cdots + g_r (a_r b/b_r) g_r)$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Damit ist die Ordnungsrelation unabhängig von der Wahl des gemeinsamen Nenners bei der Wahl von Repräsentanten. Man kann G via $\iota : G \to G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ als Untergruppe auffassen, weil G als geordnete Gruppe torsionsfrei ist, und man kann die angegebene Ordnung als Fortsetzung der Ordnung auf G auffassen.

Korollar 2.3.13. *Sei K ein Körper und R ein Bewertungsring von K, sowie $\tilde{R}$ eine Fortsetzung von R auf den algebraischen Abschluss K^{alg} von K. Die Wertegruppe $\widetilde{\Gamma}$ von $\widetilde{R}$ entspricht dann $\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.*

Beweis. Zunächst ist $\widetilde{\Gamma}$ eine teilbare Gruppe, d.h. für alle $x \in \widetilde{\Gamma}$ und $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $y \in \widetilde{\Gamma}$ mit $x = ny$. Die multiplikative Gruppe von K^{alg} ist teilbar, denn für jedes $a \in (K^{\mathrm{alg}})^\times$ hat das Polynom $X^n - a$ Nullstellen in K^{alg}. Damit ist $\widetilde{\Gamma}$ als Quotient von $(K^{\mathrm{alg}})^\times$ ebenfalls teilbar. Außerdem ist nach Satz 2.3.7 der Quotient $\widetilde{\Gamma}/\Gamma$ eine Torsionsgruppe. Ebenfalls nach diesem Satz haben wir eine Erweiterung der Restklassenkörper. Nun ist der Restklassenkörper $\kappa(\widetilde{v})$ von $\widetilde{R}$ ebenfalls algebraisch abgeschlossen. Für $a_0, \ldots, a_n \in \widetilde{R}, n \geq 1$ und $a_n \in \widetilde{R}^\times$ hat das Polynom $\overline{f} = \overline{a_0} + \overline{a_1} X + \cdots + \overline{a_n} X^n \in \kappa(\widetilde{v})[X]$ Nullstellen in $\kappa(\widetilde{v})$, da $f = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ Nullstellen in $\tilde{R}$ hat, weil $\widetilde{R}$ ganzabgeschlossen in K^{alg} ist. Die Behauptung folgt also mit Satz 2.3.7. □

Es gilt also $\mathrm{rk}(G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) = \mathrm{rk}(G)$. Allgemein gilt:

Proposition 2.3.14. *Sei G eine geordnete Gruppe und H eine Untergruppe von G. Dann gilt*

$$\mathrm{rk}(G) \leq \mathrm{rk}(H) + \mathrm{rr}(G/H).$$

Für den Spezialfall $H = \{0\}$ folgt $\mathrm{rk}(G) \leq \mathrm{rr}(G)$. Insbesondere ist der Rang einer Bewertung also nie größer als ihr rationaler Rang.

Beweis. Sei $G_0 \subsetneq G_1 \subsetneq \cdots \subsetneq G_r = G$ eine Kette konvexer Untergruppen von G. Offenbar gilt $r \leq \mathrm{rk}(G)$. Wir zeigen per Induktion nach r, dass $r \leq \mathrm{rk}(H) + \mathrm{rr}(G/H)$. Für $r = 0$ ist die Aussage offenbar richtig. Sei nun $r \geq 1$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$r - 1 \leq \mathrm{rk}(G_{r-1} \cap H) + \mathrm{rr}(G_{r-1}/(G_{r-1} \cap H)).$$

Wir unterscheiden zwei Fälle. Ist $H \subseteq G_{r-1}$, dann gilt $r \leq \mathrm{rk}(H) + \mathrm{rr}(G_{r-1}/H) + 1$. Nun ist G_{r-1} eine konvexe Untergruppe und G/G_{r-1} damit eine geordnete Gruppe, also auch torsionsfrei und es gilt $\mathrm{rr}(G/G_{r-1}) \geq 1$. Das bedeutet

$$\mathrm{rr}(G/H) = \mathrm{rr}(G/G_{r-1}) + \mathrm{rr}(G_{r-1}/H) \geq \mathrm{rr}(G_{r-1}/H) + 1$$

und damit gilt die Behauptung. Im anderen Fall ist $H \cap G_{r-1}$ eine echte konvexe Untergruppe von H, also $\mathrm{rk}(H) > \mathrm{rk}(G_r)$. Wegen $\mathrm{rr}(G/H) \geq \mathrm{rr}(G_{r-1}/(G_{r-1} \cap H))$ folgt auch in diesem Fall die Behauptung. □

Korollar 2.3.15. *Sei v eine Bewertung auf K, die eine Komposition einer Bewertungen v' auf K und einer Bewertung $\overline{v}$ auf $\kappa(v')$ im Sinne von (2.2) ist, d.h. $v = v' \circ \overline{v}$. Dann gilt*

$$rk(v) = rk(v') + rk(\overline{v}) \quad und \quad rr(v) = rr(v') + rr(\overline{v}).$$

Satz 2.3.16. *Angenommen K/k ist eine Körpererweiterung, $v : k \to \Gamma \cup \{\infty\}$ eine Bewertung auf k und $w : K \to \Gamma' \cup \{\infty\}$ eine Erweiterung von v nach K und $R = R_w$ der dazugehörige Bewertungsring.*

Seien $x_1, \ldots, x_r \in R$ sodass $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_r} \in \kappa(w)$ linear unabhängig über $\kappa(v)$ und $y_1, \ldots, y_s \in K^\times$ sodass $\overline{w(y_1)}, \ldots, \overline{w(y_1)} \in \Gamma'/\Gamma$ linear unabhängig über $\mathbb{Z}$ sind. Dann sind $x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s$ algebraisch unabhängig über k. Ferner hat die Restriktion v' von w auf $K' = k(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s)$ den Restklassenkörper $\kappa(v') = \kappa(v)(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_r})$ und die Wertegruppe $\Gamma + \mathbb{Z}v'(y_1) + \cdots + \mathbb{Z}v'(y_s)$.

Beweis. Wir zeigen die Aussage zunächst in den beiden einfachsten nicht-trivialen Fällen $r = 1, s = 0$ und $s = 1, r = 0$ und führen eine Induktion nach $r + s$ durch.

Sei zunächst $r = 1, s = 0$ und $x = x_1 \in R$. Ist $\overline{x} \in \kappa(w)$ algebraisch unabhängig über $\kappa(v)$, so kann $x \in K$ nach Satz 2.3.7 nicht algebraisch über k sein. Der Rest der Aussage folgt direkt aus Korollar 2.3.11 für $\gamma' = 0$. Sei nun $r = 0, s = 1$ und $y = y_1 \in K^\times$ mit $\overline{w(y)} \in \Gamma'/\Gamma$. Die Eigenschaft, $\mathbb{Z}$-linear unabhängig zu sein, heißt in diesem Fall, dass $\overline{w(y)}$ keine Torsion in Γ'/Γ ist. Nach Satz 2.3.7 muss dann y bereits transzendent über k sein. Der Rest der Aussage folgt wieder mit Korollar 2.3.11. Damit ist der Induktionsanfang gezeigt.

Wir nehmen nun an, die Aussage gilt für jedes Paar n, m mit $n + m < k$, es sei $k = r + s$ und wir zeigen die beiden Fälle $r \neq 0$ und $s \neq 0$. Wir nehmen zunächst $s \neq 0$ an. Weil $x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_{s-1} \in K_1 = k(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_{s-1})$ die Induktionsvoraussetzung erfüllen, sind sie algebraisch unabhängig über k und $v_1 = w|_{K_1}$ hat den Restklassenkörper $\kappa(v_1) = \kappa(v)(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_r})$ und die Wertegruppe $\Gamma_1 = \Gamma + \mathbb{Z}v_1(y_1) + \cdots + \mathbb{Z}v_1(y_{s-1})$. Aus dem Fall $r + s = 1$ folgt, dass y_s transzendent über K_1 ist und wie gefordert sind $x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots y_s$ algebraisch unabhängig über k. Die zweite Aussage folgt auch induktiv durch Anwendung des Falls $r+s=1$ auf K/K_1, wie das folgende Bild zeigt.

$$\begin{array}{lll}
K & \kappa(w) & \Gamma' \\
| & | & | \\
\tilde{K} & \kappa(\tilde{v})=\kappa(v_1) & \tilde{\Gamma}=\Gamma_1+\mathbb{Z}\tilde{v}(y_s) \\
| & | & | \\
K_1 & \kappa(v_1) & \Gamma_1=\Gamma+\mathbb{Z}v_1(y_1)+\cdots+\mathbb{Z}v_1(y_{s-1}) \\
| & | & | \\
k & \kappa(v) & \Gamma
\end{array}$$

Der Fall $r \neq 0$ funktioniert analog. □

Theorem 2.3.17 (Dimensions-Ungleichung). *Mit Notation aus Satz 2.3.16 folgt, dass*

$$\operatorname{trdeg}(\kappa(w)/\kappa(v)) + \operatorname{rr}(\Gamma'/\Gamma) \leq \operatorname{trdeg}(K/k). \tag{2.10}$$

Ist K ferner endlich erzeugt über k und in (2.10) gilt Gleichheit, dann ist Γ'/Γ ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Modul und $\kappa(w)$ ist endlich erzeugt über $\kappa(v)$.

Beweis. Für jedes Paar von Zahlen $r \leq \operatorname{trdeg}(\kappa(w)/\kappa(v))$ und $s \leq \operatorname{rr}(\Gamma'/\Gamma)$ lassen sich Elemente $x_1,\ldots,x_r,y_1,\ldots,y_s \in K$ wählen, die die Bedingung aus Satz 2.3.16 erfüllen und damit algebraisch unabhängig über k sind. Damit gilt $r+s \leq \operatorname{trdeg}(K/k)$ und (2.10) ist bewiesen.

Es bleibt noch der Zusatz zu zeigen. Sei also K endlich erzeugt über k. Dann muss auch der Transzendenzgrad endlich sein und nach bereits bewiesenen Ungleichung also auch $r := \operatorname{trdeg}(\kappa(w)/\kappa(v)) < \infty$ und $s := \operatorname{rr}(\Gamma'/\Gamma) < \infty$. Weil nach Voraussetzung $\operatorname{trdeg}(K/k) = s+r$ gilt, sind Elemente $x_1,\ldots,x_r,y_1,\ldots,y_s \in K$, die die Voraussetzungen von Satz 2.3.16 erfüllen, bereits eine Transzendenzbasis von K über k. Damit ist K algebraisch über $\widetilde{K} = k(x_1,\ldots,x_r,y_1,\ldots,y_s)$ und sogar endlich, weil K/k endlich erzeugt ist. Setzte $\widetilde{v} = w|_{\widetilde{K}}$ und sei $\widetilde{\Gamma}$ die dazugehörige Wertegruppe. Nach Satz 2.3.16 gilt $\kappa(\widetilde{v}) = \kappa(v)(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_r})$ und $\widetilde{\Gamma} = \Gamma + \mathbb{Z}\widetilde{v}(y_1)+\cdots+\mathbb{Z}\widetilde{v}(y_s)$. Nach Korollar 2.3.6 ist $e(w/\widetilde{v}) < \infty$ und damit der Quotient $\Gamma'/\widetilde{\Gamma}$ endlich und $\kappa(w)$ ist eine endliche Erweiterung von $\kappa(\widetilde{v})$. □

In bisheriger Notation liefert dies zusammen mit Proposition 2.3.14

$$\operatorname{trdeg}(\kappa(w)/\kappa(v)) + \operatorname{rk}(\Gamma') \leq \operatorname{trdeg}(K/k) + \operatorname{rk}(\Gamma).$$

Beispiel 2.3.18. Es gibt Fälle, in denen (2.10) strikt ist. Dazu betrachten wir Fortsetzungen einer Bewertung v auf k zu einer rein transzendenten Erweiterung $k(X)$, die anders konstruiert werden als in Beispiel 2.3.10 bzw. Korollar 2.3.11. Sei $k = \mathbb{Q}$ und $v = v_p$ die p-adische Bewertung. Bezeichne ferner $\widehat{v}_p$ die (eindeutige) Fortsetzung auf den p-adischen Zahlkörper $\mathbb{Q}_p$. Diese Erweiterung ist nicht algebraisch, wir können also ein Element $\alpha \in \mathbb{Q}_p$ wählen, das transzendent über $\mathbb{Q}$ ist. Dann ist $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ eine Körpererweiterung mit $\operatorname{trdeg}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}) = 1$. Nun gilt aber für $(\mathbb{Q}, v_p) \subseteq (\mathbb{Q}_p, \widehat{v}_p)$ schon, dass $e(\widehat{v}_p/v_p) = f(\widehat{v}_p/v_p) = 1$ und wegen der Multiplikativität der Verzweigungsindex und des Restklassengrads folgt $e(w/v) = f(w/v) = 1$. Also gilt $\operatorname{trdeg}(\kappa(w)/\kappa(v)) = \operatorname{rr}(\Gamma_w/\Gamma_{v_p}) = 0$, womit (2.10) strikt ist.

Kapitel 3

Der Riemann-Zariski-Raum

3.1 Zentrum einer Bewertung

Wir wiederholen zunächst eine Definition des aus Kapitel 2.

Sei K ein Körper und $A \subseteq K$ ein Integritätsring. Wir sagen, ein Bewertungsring R von K ist *zentriert* in A, wenn $A \subseteq R$, und in diesem Fall nennen wir das Primideal $\mathfrak{m}_R \cap A$ das *Zentrum* von R in A. Die Menge der Bewertungsringe von K, die in A zentriert sind, bezeichnen wir mit $\mathrm{Val}_A(K)$. Man bemerke, dass das Zentrum $\mathfrak{p}$ in A das eindeutige Primideal von A ist, sodass der korrespondierende lokale Ring $A_{\mathfrak{p}}$ von R dominiert wird. Ist A ein lokaler Ring, so ist das Zentrum von R in A genau dann das maximale Ideal von A, wenn R den Ring A dominiert.

Ein Bewertungsring in K legt bis auf Ordnungsisomorphismus der Wertegruppen eindeutig eine Bewertung fest. Von der Menge von Bewertungsringen von K zu sprechen, die A enthalten, ist also nichts anderes als von den Äquivalenzklassen von Bewertungen w auf K zu sprechen, für die $w(A) \geq 0$ gilt. Im Spezialfall $A = \mathbb{Z}$ ist dies nichts anderes als die Menge der Äquivalenzklassen aller Bewertungen auf K, d.h. $\mathrm{Val}_{\mathbb{Z}}(K) = \mathrm{Val}(K)$.

Bemerkung 3.1.1. Ist $A = K$, so können nur diejenigen Bewertungen auf K enthalten sein, dessen Bewertungsringe K sind. Das ist aber nur die triviale Bewertung und damit besteht der Raum $\mathrm{Val}_K(K)$ nur aus einem Punkt.

Sei nun X ein integres Schema von endlichem Typ über $\operatorname{Spec} A$ und $K = K(X)$ der Funktionenkörper. Wir betrachten eine Bewertung $w \in \mathrm{Val}_A(K)$ und wollen, [Vaq08] folgend, das Zentrum von w auf X definieren.

Sei X zunächst ein affines Schema, d.h. $X = \operatorname{Spec} B$ für eine endlich erzeugte A-Unteralgebra von K. Ist B enthalten in dem zu w assoziierten Bewertungsring $R = R_w$, so ist das Zentrum der Bewertung w auf X ein Punkt $x \in X$, der zu einem Primideal $\mathfrak{p}$ von B gehört, welches das Zentrum von R in B im obigen Sinne ist. Weil $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist, ist das assoziierte abgeschlossene Unterschema $Z = V(\mathfrak{p})$ reduziert und irreduzibel mit dem generischen Punk x. Man nennt manchmal auch Z das Zentrum von w in X. Ist B nicht in R enthalten, so sagen wir, w hat kein Zentrum in X.

Sei X nun ein integres Schema von endlichem Typ über $\operatorname{Spec} A$ und $K = K(X)$ der Funktionenkörper. Wir wollen das Zentrum einer Bewertung $w \in \mathrm{Val}_A(K)$ in X definieren als einen Punkt $x_w \in X$, sodass der Bewertungsring R_w den lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,x_w}$ dominiert. Man bemerke, dass das nichts anderes heißt, als dass es einen lokalen Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_{X,x_w} \to R_w$ gibt. Nach Bemerkung A.2.3 können wir das Zentrum einer Bewertung w auf X, sofern es existiert und eindeutig ist, als das Bild des abgeschlossenen Punktes unter $\operatorname{Spec} R_w \to X$ definieren. Der folgende Satz zeigt, welche Bedingungen hierfür hinreichend und notwendig sind.

Satz 3.1.2. *Sei X ein integres Schema von endlichem Typ über einem Integritätsring A und $K = K(X)$ der Funktionenkörper. Dann gilt:*

(i) Ist X separiert über $\operatorname{Spec} A$, *dann gibt es für jede Bewertung $w \in \operatorname{Val}_A(K)$ höchstens einen Punkt $x \in X$, sodass der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ von dem Bewertungsring R_w dominiert wird.*

(ii) Ist X eigentlich über $\operatorname{Spec} A$, *dann gibt es für jede Bewertung $w \in \operatorname{Val}_A(K)$ genau einen Punkt $x \in X$, sodass der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ von dem Bewertungsring R_w dominiert wird.*

Existiert für eine Bewertung $w \in \operatorname{Val}_A(K)$ ein solcher Punkt x in X, so enthält das irreduzible abgeschlossene Unterschema Z, das definiert ist als $Z = \overline{\{x\}}$, die Menge aller Punkte $x' \in X$, deren lokale Ringe in dem Bewertungsring $R = R_w$ enthalten sind. Entspricht das Zentrum von w dem generischen Punkt von X, so ist w die triviale Bewertung.

Beweis. Die Aussagen (i) und (ii) folgen unmittelbar aus den Bewertungskriterien für Separiertheit und Eigentlichkeit (siehe Satz A.2.4 und Satz A.2.10) und den vorherigen Bemerkungen.

Für den Zusatz nehmen wir ohne Einschränkung an, dass $X = \operatorname{Spec} B$ affin ist. Dann gilt $Z = V(\mathfrak{p})$, wobei $\mathfrak{p} = B \cap \mathfrak{m}_w$ das Zentrum von w im Ring B bezeichne. Die Aussage folgt daraus, dass für jedes Primideal $\mathfrak{q}$ von B genau dann $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ gilt, wenn $B_{\mathfrak{q}} \subseteq R_w$.

□

Definition 3.1.3. Sei X ein integres Schema, das separabel und von endlichem Typ über $\operatorname{Spec} A$ ist mit Funktionenkörper $K = K(X)$. Das *Zentrum* einer Bewertung $w \in \operatorname{Val}_A(K)$ in X ist ein Punkt $x_w \in X$, sodass der Bewertungsring R_w den lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,x_w}$ dominiert. Existiert kein solcher Punkt, so sagen wir, w besitzt in X kein Zentrum.

Proposition 3.1.4. *Sei $A = \mathfrak{o}$ ein diskreter Bewertungsring von k und bezeichne v die dazugehörige Bewertung. Sei ferner X ein integres Schema, das eigentlich über* $\operatorname{Spec} \mathfrak{o}$ *ist mit $K = K(X)$. Dann liegt das Zentrum x_w einer Bewertung $w \in \operatorname{Val}_v(K)$ in X in der speziellen Faser $X_\kappa = X \times_{\operatorname{Spec} \mathfrak{o}} \operatorname{Spec} \kappa$, wobei $\kappa = \kappa(v)$.*

Beweis. Sei π ein Uniformisierendes von $\mathfrak{o}$, d.h. $\mathfrak{m}_v = (\pi)$. Ohne Einschränkung sei $X = \operatorname{Spec} B$ affin und $\mathfrak{p}$ das zu x_w korrespondierende Primideal. Dann ist $X_\kappa = \operatorname{Spec}(B \otimes_{\mathfrak{o}} \kappa) = \operatorname{Spec}(B/(\pi)B)$ und enthält damit $\mathfrak{p}$, weil $(\pi) \subseteq \mathfrak{p} = \mathfrak{m}_w \cap B$. Das zeigt die Behauptung. □

Definition 3.1.5. Sei X ein integres Schema, das separabel und von endlichem Typ über $\operatorname{Spec} A$ ist mit Funktionenkörper $K = K(X)$. Eine Bewertung w von K über A ist *divisoriell in X*, wenn sie ein Zentrum in X erlaubt, welches ein normaler Punkt von Kodimension 1 ist. Eine solche Bewertung ist notwendigerweise diskret.

Sei X nun ferner normal. Nach Bemerkung A.3.2 ist für jede abgeschlossene irreduzible Teilmenge $D \subseteq X$ von Kodimension 1 der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,\xi}$ am generischen Punkt ξ von D ein diskreter Bewertungsring. Die Bewertung v_D ist dann divisoriell in X, da ihr Zentrum ξ ist. Betrachtet man andersrum eine divisorielle Bewertung w von K über A, dann ist der Abschluss $D = \overline{\{\xi\}}$ des Zentrums ξ von w auf X eine abgeschlossene irreduzible Teilmenge von Kodimension 1 in X. Wir haben also in diesem Fall eine kanonische Korrespondenz zwischen divisoriellen A-Bewertungen von K in X und Weil-Primdivisoren von X.

3.2 Zariski-Topologie

Setze $\mathfrak{X} = \mathrm{Val}_A(K)$. Wir möchten nun eine Topologie auf $\mathfrak{X}$ definieren. Seien dazu zunächst $x_1, \dots, x_n \in K$. Setze

$$U(x_1, \dots, x_n) := \mathrm{Val}_{A[x_1,\dots,x_n]}(K),$$

was nichts anderes ist als

$$\{w \in \mathfrak{X} \mid w(x_i) \geq 0 \text{ für alle } i = 1, \dots, n\}.$$

Es folgt damit für $y_1, \dots, y_s \in K$, dass

$$U(x_1, \dots, x_n) \cap U(y_1, \dots, y_s) = U(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_s).$$

Wir benutzen nun für eine endliche Teilmenge $S \subset K$ die Notation $U(S)$ und meinen damit diejenigen $R \in \mathfrak{X}$ mit $S \subset R$ und setzen $U(\{x\}) = U(x)$ für $x \in K$. Mit den obigen Überlegungen ist sichergestellt, dass die Familie

$$\mathcal{F} := \{U(S) \mid S \subset K \text{ endlich}\}$$

tatsächlich eine Basis von offenen Mengen einer Topologie auf $\mathfrak{X}$ bildet. Die offenen Mengen der Topologie sind beliebige Vereinigungen von Mengen der Form $U(S)$. Wir bezeichnen diese Topologie als *Zariski-Topologie*.

Definition 3.2.1 (Riemann-Zariski-Raum)**.** Sei K ein Körper und $A \subseteq K$ ein Unterring. Die Menge $\mathfrak{X} = \mathrm{Val}_A(K)$ der Bewertungsringe von K, die in A zentriert sind, zusammen mit der Zariski-Topologie auf $\mathfrak{X}$ bezeichnen wir als *Riemann-Zariski-Raum* von K über A.

Satz 3.2.2. *Sei K ein Körper, $A \subseteq K$ ein Unterring und $v \in \mathrm{Val}_A(K)$. Dann ist der Abschluss von $\{v\}$ die Menge aller Bewertungen v' in $\mathrm{Val}_A(K)$, die Kompositionen von v sind, d.h.*

$$\overline{\{v\}} = \{v' \in \mathrm{Val}_A(K) \mid \ v' \textit{ ist eine Komposition von } v\}.$$

Genauer ist der Abschluss $\overline{\{v\}}$ isomorph zu dem Riemann-Zariski-Raum $\mathrm{Val}_A(\kappa(v))$.

Beweis. Seien v und v' zwei Bewertungen auf K, dessen Bewertungsringe A enthalten. Dann ist v' nach Theorem 2.1.12 genau dann eine Komposition von v, wenn $R_{v'} \subseteq R_v$. Ist v' im Abschluss von $\{v\}$, folgt für jede endlich erzeugte A-Unteralgebra $B = A[x_1, \dots, x_n]$ von K aus $v' \in U(x_1, \dots, x_n)$ bereits $v \in U(x_1, \dots, x_n)$, was äquivalent dazu ist, dass aus $B \subseteq R_{v'}$ folgt, dass $B \subseteq R_v$. Damit liegt $R_{v'}$ in R_v. Ist $v' \notin \overline{\{v\}}$, dann existiert eine endlich erzeugte A-Algebra B mit $B \subseteq R_{v'}$ und $B \nsubseteq R_v$ und damit liegt $R_{v'}$ nicht in R_v.

Sei nun $v' \in \overline{\{v\}}$. Dann ist $v' = v \circ \overline{v}$ für eine Bewertung $\overline{v}$ von $\kappa(v)$, d.h. insbesondere $\overline{v} \in \mathrm{Val}_A(\kappa(v))$. Die Abbildung, die v' auf $\overline{v}$ schickt, ist nach Theorem 2.1.12 eine Bijektion . Ferner handelt es sich um einen Homöomorphismus, denn für $x \in R_v$ gilt genau dann $v'(x) \geq 0$, wenn $\overline{v}(\overline{x}) \geq 0$, wobei $\overline{x}$ das Bild von x in $\kappa(v)$ bezeichne. □

Bemerkung 3.2.3. Sei v_0 die triviale Bewertung auf K. Alle Bewertungen auf K sind Kompositionen von v_0. Der Bewertungsring, der mit v_0 assoziiert wird, ist der Körper K und damit liegt v_0 in allen nicht-leeren offenen Mengen $U(S)$ und v_0 ist der generische Punkt von $\mathrm{Val}_A(K)$.

Wir wollen nun einen anderen Blick auf die Topologie auf $\mathfrak{X} = \mathrm{Val}_A(K)$ gewinnen. Wir folgen dabei [ZS13] und betrachten die injektive Abbildung

$$\mathrm{sgn} : \mathrm{Val}_A(K) \to \prod_{f \in K^\times} \{-, 0, +\}, \tag{3.1}$$

die auf ihren Komponenten gegeben ist durch

$$w \mapsto (\mathrm{sgn}(w(f)) = \begin{cases} -, & \text{wenn } w(f) < 0 \\ 0, & \text{wenn } w(f) = 0 \\ +, & \text{wenn } w(f) > 0. \end{cases}$$

Sei nun $Z = \{-, 0, +\}$ und $Z^K = \prod_{f \in K^\times} \{-, 0, +\}$. Wir geben Z zunächst die folgende Topologie: die offenen Mengen seien genau $\emptyset, Z$ und $\{0, +\}$. Ferner sei Z^K mit der entsprechenden Produkttopologie versehen. Wir können $\mathfrak{X}$ als Teilraum auffassen. Per Definition der Produkttopologie bilden die folgenden Mengen eine Basis der offenen Mengen in der induzierten Topologie,

$$\{w \in \mathfrak{X} \mid w(x_i) \in \{0, +\} \text{ für } i = 1, \ldots, n\}$$

wobei $x_1, \ldots, x_n \in K$. Man sieht unmittelbar, dass die eben definierte Menge nichts anderes ist als $U(x_1, \ldots, x_n)$. Die induzierte Topologie stimmt also mit der Zariski-Topologie auf $\mathfrak{X}$ überein. Man bemerke, dass für $x \in K$ die Menge $\{w \in \mathfrak{X} \mid w(x) = 0\}$ wegen $\{w \in \mathfrak{X} \mid w(x) = 0\} = \{w \in \mathfrak{X} \mid w(x) \geq 0\} \cap \{w \in \mathfrak{X} \mid w(x^{-1}) \geq 0\}$ offen in der Zariski-Topologie ist. Wir erhalten die Zariski-Topologie auch als induzierte Topologie, wenn wir Z mit der Topologie ausstatten, in der $\emptyset, Z, \{0, +\}, \{0, -\}$ und $\{0\}$ die offenen Mengen sind.

Man bemerke ferner, dass Mengen der Form $\{w \in \mathfrak{X} \mid w(x) > 0\}$ in der Zariski-Topologie nicht offen sind. Wir können eine feinere Topologie auf $\mathfrak{X}$ definieren, indem wir Z mit der diskreten Topologie ausstatten. Der Raum Z^K ist dann als Produkt endlicher diskreter Räume proendlich und damit nach [Stacks, Tag 08ZW] Hausdorffsch, quasi-kompakt und total unzusammenhängend.

Es wird eine Topologie auf $\mathfrak{X}$ durch die proendliche Produkttopologie induziert. Diese Topologie wird als *konstruierbare Topologie* oder auch *Patch-Topologie* bezeichnet. Es lässt sich nun Folgendes beweisen.

Proposition 3.2.4. *Sei K ein Körper mit $A \subseteq K$ ein Unterring. Dann ist $\mathfrak{X} = \mathrm{Val}_A(K)$ kompakt (d.h. quasi-kompakt und Hausdorffsch) bezüglich der konstruierbaren Topologie.*

Beweis. Es genügt, sich klar zu machen, dass $\mathfrak{X}$ unter der Abbildung (3.1) als abgeschlossener Unterraum aufgefasst werden kann. Dazu müssen wir erklären, dass die Bedingung an eine Vereinigung von Vorzeichen, zu einem Bewertungsring zu gehören, eine abgeschlossene Bedingung ist. Da nach vorheriger Diskussion der Raum $Z^K = \prod_{f \in K^\times} \{-, 0, +\}$ proendlich ist, folgt die Behauptung. Sei $z = (z_f)_{f \in K^\times} \in Z^K$. Dann gilt $z \in \mathfrak{X}$ genau dann, wenn

(a) $Z_{\geq 0} = \{f \in K^\times \mid z_f \in \{0, +\}\}$ unter Addition und Multiplikation abgeschlossen ist;

(c) $A \subseteq Z_{\geq 0}$;

(b) Für alle $f \in K^\times$ gilt $z_f \notin \{0, +\}$, dann $z_{f^{-1}} \in \{+\}$.

Um uns klar zu machen, dass es sich hierbei um eine abgeschlossene Bedingung handelt, formulieren wir diese um. Zunächst bedeutet (a), dass für alle $f, g \in K^\times$

entweder das Vorzeichen an der Stelle f bzw. g negativ ist oder das Vorzeichen an den Stellen $f+g$ und $f \cdot g$ nicht-negativ ist. Ferner ist (c) äquivalent dazu, dass für alle $f \in A$ gilt $z_f \in \{0,+\}$. Bezeichne schließlich

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_f : \ & Z^K \to Z \\ & (z_f)_{f \in K^\times} \mapsto z_f \end{aligned}$$

die Projektion vom Produkt auf die f-Komponente. Für $f, g \in K^\times$ sei

$$P_{f,g} = \left(\mathrm{pr}_f^{-1}\{-\} \cup \mathrm{pr}_g^{-1}\{-\} \cup \mathrm{pr}_{f+g}^{-1}\{-\}\right) \cap \left(\mathrm{pr}_f^{-1}\{-\} \cup \mathrm{pr}_g^{-1}\{-\} \cup \mathrm{pr}_{f \cdot g}^{-1}\{-\}\right)$$

und wir formen schließlich die obigen Bedingungen um zu:

(a) $z \in \bigcap_{f,g \in K^\times} P_{f,g}$;

(b) $z \in \bigcap_{f \in K^\times \cap A} \mathrm{pr}_f^{-1}\{0,+\}$;

(c) $z \in \bigcap_{f \in K^\times} \left(\mathrm{pr}_f^{-1}\{0,+\} \cup \mathrm{pr}_{f^{-1}}\{+\}\right)$.

Damit ist $\mathfrak{X}$ als Schnitt abgeschlossener Mengen in Z^K abgeschlossen. □

Für die (gröbere) Zariski-Topologie folgt dann:

Satz 3.2.5. *Sei K ein Körper und $A \subseteq K$ ein Unterring. Dann ist $\mathfrak{X} = \mathrm{Val}_A(K)$ quasikompakt bezüglich der Zariski-Topologie.*

Ist $A = \mathfrak{o}$ ein diskreter Bewertungsring und v die korrespondierende Bewertung, so ist die Teilmenge

$$\mathrm{Val}_v(K) = \{w \in \mathrm{Val}_{\mathfrak{o}}(K) : w|_k = v\} \subset \mathrm{Val}_{\mathfrak{o}}(K)$$

eine abgeschlossene Teilmenge in der konstruierbaren Topologie, beschrieben durch die abgeschlossene Bedingung, dass $w(\pi) > 0$ für ein uniformisierendes Element π von $\mathfrak{o}$.

3.3 Spektralräume

Bevor wir uns der Geometrie des Riemann-Zariski-Raums zuwenden, wollen wir zeigen, dass es sich um einen sogenannten Spektralraum handelt. Wir orientieren uns dabei weitgehend an [Con14].

Wir nennen zwei Punkte $x, y \in X$ *topologisch ununterscheidbar*, wenn jede offene Menge genau dann x enthält, wenn sie y enthält, oder äquivalent, wenn $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. Andernfalls nennt man die beiden Punkte *unterscheidbar*. Ein topologischer Raum ist ein *Kolmogoroff-Raum* oder T_0-Raum, wenn jedes Paar von verschiedenen Punkten topologisch unterscheidbar ist. Ein topologischer Raum ist also genau dann ein T_0-Raum, wenn jede abgeschlossene irreduzible Teilmenge höchstens einen generischen Punkt zulässt. Auf einem T_0-Raum X ist durch

$$x' \leq x \iff x' \in \overline{\{x\}}$$

für $x, x' \in X$ eine partielle Ordnung gegeben. Ein topologischer Raum X heißt *nüchtern*, wenn jede irreduzible abgeschlossene Teilmenge genau einen generischen Punkt besitzt. Insbesondere ist also jeder nüchterne Raum ein T_0-Raum.

Definition 3.3.1 (Spektralraum)**.** Ein topologischer Raum X heißt *spektral*, wenn er die folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) X ist quasi-kompakt;

(ii) X besitzt eine Basis quasi-kompakter offener Teilmengen, die unter endlichen Schnitten abgeschlossen ist;

(iii) X ist nüchtern.

Offensichtlich ist ein affines Schema $X = \operatorname{Spec} A$ ein Spektralraum. Ist X ein Schema, so ist der unterliegende topologische Raum genau dann spektral, wenn X quasi-kompakt und und der Schnitt quasi-kompakter offener Teilmengen wieder quasi-kompakt ist. Einen topologischen Raum mit letzterer Eigenschaft nennt man auch *quasi-separiert*.

Nach der Diskussion in Abschnitt 3.2 ist klar, dass $\mathfrak{X}$ ein T_0-Raum ist. Ferner ist $\mathfrak{X}$ wegen Satz 3.2.5 quasi-kompakt und besitzt wegen

$$U(x_1, \ldots, x_n) = \operatorname{Val}_{A[x_1,\ldots,x_n]}(K)$$

für $x_1, \ldots, x_n \in K$ eine Basis von quasi-kompakten offenen Mengen, die abgeschlossen unter endlichen Schnitten ist. Um zu zeigen, dass $\mathfrak{X}$ ein Spektralraum ist, bleibt zu zeigen, dass jede irreduzible abgeschlossene Teilmenge einen generischen Punkt besitzt. Das lässt sich rein topologisch zeigen, siehe [DFF87], die Aussage wird jedoch unmittelbar aus der Diskussion im nächsten Abschnitt folgen.

Wir hatten auf dem Riemann-Zariski-Raum bereits eine feinere Topologie definiert, die wir als konstruierbare Topologie bezeichnet hatten. Nun wollen wir den Begriff einer *konstruierbaren Topologie* auf einem topologischen Raum X einführen. Grob möchten wir nur solche abgeschlossenen Mengen erlauben, dessen Komplement quasi-kompakt ist. Wir werden außerdem sehen, dass es auf Spektralräumen sinnvoll ist, über diese Topologie zu sprechen. Siehe [Con14] für Details.

Dazu führen wir zunächst einige Begriffe ein. Sei X ein topologischer Raum und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Dann heißt f *quasi-kompakt*, wenn das Urbild jeder quasi-kompakten offenen Menge wieder quasi-kompakt ist. Ein Unterraum $Z \subseteq X$ heißt *retro-kompakt*, wenn die Inklusion $Z \hookrightarrow X$ quasi-kompakt ist. Die Abbildung f heißt *quasi-separiert*, wenn das Urbild jeder quasi-separierten Teilmenge wieder quasi-separiert ist. Somit ist ein topologischer Raum ist genau dann quasi-separiert, wenn jede quasi-kompakte offene Menge retro-kompakt ist.

Besitzt Y eine Basis quasi-kompakter offener Mengen, so genügt es, die Bedingung für Quasi-Kompaktheit und Quasi-Separiertheit von f aus der vorherigen Definition für die offenen Mengen der Basis nachzuprüfen. Letzteres ist dann ferner äquivalent dazu, dass die Diagonalabbildung $\Delta : Y \to Y \times Y$ quasi-kompakt ist.

Ist X quasi-kompakt, so ist eine Teilmenge V genau dann retro-kompakt, wenn für alle quasi-kompakten offenen Teilmengen U der Schnitt $V \cap U$ quasi-kompakt ist. Ist X quasi-kompakt und quasi-separiert, so sind alle quasi-kompakten Teilmengen retro-kompakt.

Definition 3.3.2 (konstruierbare Teilmengen und Topologie)**.** Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ heißt *konstruierbar*, wenn sie eine endliche boolsche Kombination retro-kompakter offener Teilmengen ist. Genauer bedeutet das also, dass eine Teilmenge $Y \subseteq X$ genau dann konstruierbar ist, wenn

$$Y = \bigcup_{i=1}^{r} (U_i \cap (X \setminus V_i)),$$

wobei $U_i, V_i \subseteq X$ für $i = 1, \ldots, r$ retro-kompakte, offene Teilmengen bezeichnen.

Die *konstruierbare* Topologie auf einem topologischen Raum X ist erzeugt von den konstruierbaren Mengen in X, d.h. eine Basis der offenen Mengen ist durch die konstruierbaren Mengen gegeben. Wir notieren X_{cons} als die Menge X ausgestattet mit der konstruierbaren Topologie.

Diese Topologie ist auf topologischen Räumen mit Basen quasi-kompakter offener Mengen interessant, denn dann kann Konstruierbarkeit auf einer Überdeckung offener quasi-kompakter Mengen geprüft werden. Die Abbildung $X_{\text{cons}} \to X$ ist ferner genau dann stetig, wenn jede offene Menge von X als eine Vereinigung quasi-kompakter offener Mengen geschrieben werden kann, was der Fall ist, wenn X eine Basis quasi-kompakter offener Mengen besitzt und quasi-separiert ist.

Man bemerke, dass die durch (3.1) beschriebene konstruierbare Topologie auf dem Riemann-Zariski-Raum mit dieser Definition übereinstimmt.

Beispiel 3.3.3. Sei $X = \operatorname{Spec} A$ ein noethersches affines Schema mit $\dim A = 1$. Es gibt nur einen generischen Punkt η, der mit dem Primideal (0) korrespondiert, sowie die abgeschlossenen Punkte, $x \in X_{\text{closed}} := X^0$, die zu maximalen Idealen von A gehören. Da X noethersch ist, sind die konstruierbaren Mengen genau die endlichen boolschen Kombinationen offener Teilmengen und damit sind alle offenen und abgeschlossenen Teilmengen konstruierbar. Da jeder abgeschlossene Punkt offen und abgeschlossen in X_{cons} ist, ist X^0 diskret in X_{cons}. Der generische Punkt kann von jedem anderen Punkt mit Hilfe eines Paars disjunkter offener Mengen in der konstruierbaren Topologie getrennt werden, denn für $x \in X^0$ ist $\{x\}$ offen (und abgeschlossen) und das offene konstruierbare Komplement U in X enthält η. Also ist X_{cons} Hausdorffsch.

Diese Beobachtung, die wir ebenfalls bereits für den Riemann-Zariski-Raum gemacht haben, lässt sich verallgemeinern.

Proposition 3.3.4. *Sei X ein Spektralraum. Dann ist die konstruierbare Topologie auf X Hausdorffsch und quasi-kompakt.*

Beweis. Siehe [Stacks, Tag 0901]. □

Bemerkung 3.3.5. Proposition 3.3.4 stellt sicher, dass für ein inverses System $\{X_i\}$ von Spektralräumen mit quasi-kompakten Übergangsfunktionen $f_{i,j} : X_i \to X_j$ der inverse Limes $X = \varprojlim_i X_i$ ein Spektralraum ist.

3.4 Der Riemann-Zariski-Raum als inverser Limes projektiver Modelle

Der folgende Abschnitt wird sich weitgehend an [Vaq08] orientieren.

Sei nun A immer ein Integritätsring in einem endlich erzeugten Funktionenkörper K über $k = \operatorname{Quot} A$. Wir wollen zeigen, dass $\mathfrak{X} = \operatorname{Val}_A(K)$ als projektiver Limes eines inversen Systems von gewissen integren Schemata aufgefasst werden kann. Dafür definieren wir ein *Modell* von K über A als ein integres Schema, das von endlichem Typ und separiert über A ist mit Funktionenkörper $K(X) = K$. Wir nennen dementsprechend ein Modell X *vollständig* bzw. *projektiv*, wenn X über A eigentlich bzw. projektiv ist. Man bemerke, dass jedes projektive Modell von K/A in praktischer Weise realisiert werden kann. Genauer existieren $f_1, \ldots, f_n \in K$, sodass mit

$A_i := A\left[\frac{f_1}{f_i}, \ldots, \frac{f_n}{f_i}\right]$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt: $X = \bigcup_i \operatorname{Spec} A_i$. Dabei werden die Primideale $\mathfrak{p}_i$ von A_j und $\mathfrak{p}_j$ von A_i identifiziert, wenn $(A_i)_{\mathfrak{p}_j} = (A_j)_{\mathfrak{p}_i}$.

Man betrachte nun die Menge $\mathcal{L} = \mathcal{L}(A)$ der lokalen A-Unteralgebren von K. Auf $\mathcal{L}$ lässt sich eine Topologie definieren, deren offene Teilmenge erzeugt werden von Mengen der Form $D(S) = \mathcal{L}(A[S])$ für $S \subseteq K$ endlich. Sei nun B eine endlich erzeugte A-Unteralgebra von K, d.h. $B = A[S]$ für $S \subseteq K$ endlich. Für $P \in \mathcal{L}$ definiert $P \mapsto \mathfrak{m}_P \cap B$ eine Abbildung f_B von $\mathcal{L}$ nach $\operatorname{Spec}(B)$. Eingeschränkt auf den Teilraum $V(B) := \{B_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(B)\} \subseteq D(S)$ von $\mathcal{L}$ ist

$$f_B : V(B) \to \operatorname{Spec}(B)$$

ein Homöomorphismus.

Ist nun X ein Modell von K/A, dann ordnen wir jedem Punkt $x \in X$ den lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ in $\mathcal{L}$ zu. Dann ist die Abbildung, die x auf $\mathcal{O}_{X,x}$ schickt, ein Homöomorphismus von X mit der Zariski-Topologie in eine Teilmenge von $\mathcal{L}$. Auf gleiche Weise können wir durch das Zuordnen von Bewertungen und ihren Bewertungsringen den Riemann-Zariski-Raum $\mathfrak{X}$ als Teilraum von $\mathcal{L}$ auffassen.

Sei $B = A[S]$ eine endlich erzeugte A-Unteralgebra von K mit $\operatorname{Quot}(B) = K$. Dann entspricht die Menge der Bewertungen aus $\mathfrak{X}$, die ein Zentrum in dem affinen Schema $X = \operatorname{Spec} B$ besitzen, der offenen Menge $U(S) \subseteq \mathfrak{X}$, welche wir nun unter Notationsmissbrauch auch mit $U(B)$ bezeichnen. Die Abbildung von $U(B)$ nach X, die eine Bewertung auf ihr Zentrum schickt, kann als Einschränkung von f_B aufgefasst werden und ist damit stetig. Allgemeiner erhalten wir folgendes Resultat.

Proposition 3.4.1. *Sei X ein Modell von K/A. Die Bewertungen von K über A, die ein Zentrum in X besitzen, bilden eine offene Teilmenge des Riemann-Zariski-Raums $\mathfrak{X} = \operatorname{Val}_A(K)$, welche wir mit $U(X)$ bezeichnen. Die Abbildung δ_X, die einer Bewertung w von $U(X)$ ihr Zentrum x_w in X zuordnet, ist stetig. Ferner ist das Schema X genau dann eigentlich über A, wenn $U(X) = \mathfrak{X}$.*

Beweis. Nach Proposition 3.1.2 ist δ_X wohldefiniert und jede Bewertung besitzt genau dann ein Zentrum in X, wenn X eigentlich über A ist. Wir können X als Vereinigung von endlich vielen affinen offenen Mengen $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$ schreiben, wobei $X_i = \operatorname{Spec} A_i$ für eine endlich erzeugte A-Unteralgebra A_i von K mit $\operatorname{Quot} A_i = K$. Dann ist $U(X)$ Vereinigung der offenen Teilmengen $U(A_i) \subseteq \mathfrak{X}$, also offen. Die Einschränkung von δ_X auf diese Teilmengen ist stetig und damit ist δ_X stetig. □

Seien X und X' Modelle von K/A und $h : X' \to X$ ein birationaler Morphismus. Ist $w \in U(X')$, so existiert ein birationaler Morphismus $f' : T = \operatorname{Spec} R_w \to X'$ und $x' = f'(t_0)$ ist das Zentrum von w in X', wobei t_0 den abgeschlossenen Punkt von T bezeichne. Dann ist $f = h \circ f'$ ein birationaler Morphismus von T nach X und damit besitzt die Bewertung w ebenfalls ein Zentrum in X, d.h. $w \in U(X)$, und das Zentrum $x = f(t_0)$ entspricht dem Bild $h(x')$ des Zentrums von w auf X'.

Man bemerke ferner, dass für jeden Punkt $x' \in X'$ das Bild $x = h(x')$ ein Punkt von X ist, sodass der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ von dem lokalen Ring $\mathcal{O}_{X',x'}$ dominiert wird. Ist dann x' das Zentrum einer Bewertung w auf X', dann wird der lokale Ring $\mathcal{O}_{X',x'}$ von R_w dominiert. Weil diese Relation transitiv ist, dominiert R_w auch $\mathcal{O}_{X,x}$, wobei $x = h(x')$. Also ist x das Zentrum von w in X. Ist nun $h : X' \to X$ eigentlich, so können wir für jede Bewertung w von $\mathfrak{X}$, die ein Zentrum auf X besitzt, das Bewertungskriterium für Eigentlichkeit A.2.10 auf das folgende Diagramm anwenden,

$$\begin{tikzcd} U = \operatorname{Spec} K \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"'] & X' \arrow[d, "h"] \\ T = \operatorname{Spec} R_w \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

wobei $f : T \to X$ definiert ist durch die Existenz eines Zentrums der Bewertung auf X. Damit existiert ein eindeutiger Morphismus $f' : T \to X'$ und das Bild x' des abgeschlossenen Punktes t_0 von T ist das Zentrum der Bewertung w auf X' und $h(x') = x$. Wir haben also das folgende Resultat bewiesen:

Proposition 3.4.2. *Seien X und X' zwei Modelle von K/A. Existiert ein birationaler Morphismus $h : X' \to X$, so erhalten wir eine Inklusion $U(X') \subseteq U(X)$ in dem Riemann-Zariski-Raum $\mathfrak{X} = \mathrm{Val}_A(K)$. Ferner ist der Morphismus $h : X' \to X$ genau dann eigentlich, wenn Gleichheit gilt, d.h. $U(X') = U(X)$.*

Sei nun X ein Modell von K/A und $U = U(X) \subset \mathfrak{X}$. Existiert ein eigentlicher und birationaler Morphismus $h_Y : Y \to X$ von Modellen von K/A, so gilt $U(Y) = U$ und die stetige Abbildung $\delta_Y : U \to Y$ erfüllt $\delta_X = h_Y \circ \delta_Y$. Sind Y und Y' Modelle von K/A mit eigentlichen und birationalen Morphismen $h_Y : Y \to X$ und $h_{Y'} : Y' \to X$, so schreiben wir $Y \prec Y'$, wenn es einen Morphismus $h_{Y',Y} : Y' \to Y$ gibt, sodass $h_{Y'} = h_Y \circ h_{Y',Y}$ und in diesem Fall ist $h_{Y',Y}$ eigentlich und birational. Wir sagen auch Y' *dominiert* Y. Wir nennen $\mathcal{D}$ das inverse System (Y, h_Y) mit der Relation $\prec$ und definieren den projektiven Limes

$$\mathcal{X} = \varprojlim_{\mathcal{D}} Y.$$

Dieser Limes ist die Teilmenge des Produktraums $\prod_{\mathcal{D}} Y$ der Elemente $x = (x_Y)$ sodass $h_{Y',Y}(x_{Y'}) = x_Y$ für ein Paar (Y, Y') mit $Y \prec Y'$. Wir betrachten $\mathcal{X}$ mit der induzierten Topologie und die natürlichen Abbildungen $t_Y : \mathcal{X} \to Y$ sind stetig.

Satz 3.4.3 (Riemmann-Zariski-Raum als projektiver Limes)**.** *Es existiert ein natürlicher Homöomorphismus $\delta : U \to \mathcal{X}$ der offenen Teilmengen $U = U(X)$ des Riemann-Zariski-Raums $\mathfrak{X} = \mathrm{Val}_A(K)$ in den projektiven Limes $\mathcal{X} = \varprojlim_{\mathcal{D}} Y$. Damit lässt sich der Riemann-Zariski-Raum $\mathfrak{X}$ mit dem projektiven Limes des inversen Systems $\mathcal{C}$ der vollständigen Modelle X von K/A identifizieren, d.h. $\mathfrak{X} = \varprojlim_{\mathcal{C}} X$.*

Beweis. Für jedes Paar (Y, Y') des inversen Systems $\mathcal{D}$ mit $Y \prec Y'$ sind die Abbildungen $\delta_Y : U \to Y$ und $\delta_{Y'} : U \to Y'$ stetig und erfüllen $\delta_Y = h_{Y',Y} \circ \delta_{Y'}$. Wir erhalten also eine stetige Abbildung δ von der offenen Mengen U in $\mathfrak{X}$ in den projektiven Limes $\mathcal{X}$, sodass $t_Y \circ \delta = \delta_Y$ für alle $Y \in \mathcal{D}$.

Wir zeigen, dass δ surjektiv ist. Sei $x = (x_Y)$ ein Punkt in $\mathcal{X}$ und $Y \prec Y'$. Dann wird $\mathcal{O}_{Y,x_Y}$ von $\mathcal{O}_{Y',x_{Y'}}$ dominiert und

$$R = \bigcup_{Y \in \mathcal{D}} \mathcal{O}_{Y,x_Y}$$

ist ein lokaler Ring, der in K enthalten ist, mit $\mathfrak{m}_R = \bigcup_{Y \in \mathcal{D}} \mathfrak{m}_{Y,x_Y}$. Nach dem Satz von Chevalley 2.3.2 existiert ein Bewertungsring $R' = R_w$ mit $w \in \mathfrak{X} = \mathrm{Val}_A(K)$, der

R dominiert. Für alle $Y \in \mathcal{D}$ dominiert R' ebenfalls die lokalen Ringe $\mathcal{O}_{Y,x_y}$. Damit ist das Zentrum der Bewertung w auf Y der Punkt $x_Y = t_Y(x)$, d.h. $w \in U$ und $\delta_Y(w) = x_Y$. Damit ist $\delta(w) = x$.

Um zu zeigen, dass δ injektiv ist, zeigen wir, dass für jeden Punkt $x = (x_Y) \in \mathcal{X}$ der lokale Ring $R = \bigcup_{Y \in \mathcal{D}} \mathcal{O}_{Y,x_Y}$ ein Bewertungsring von K ist (und damit als Element von $\mathfrak{X}$ aufgefasst werden kann). Sei nun $0 \neq s \in K$. Wegen $\operatorname{Quot}(R) = K$ gilt $s = u/t$ für $u, t \in R$. Es reicht zu zeigen, dass $s \in R$ oder $s^{-1} \in R$.

Es existieren $Y', Y'' \in \mathcal{D}$, sodass $u \in \mathcal{O}_{Y',x_{Y'}}$ und $t \in \mathcal{O}_{Y'',x_{Y''}}$, und da es ein Y in $\mathcal{D}$ gibt, das Y' und Y'' dominiert[1], können wir annehmen, dass u und t zum gleichen lokalen Ring $\mathcal{O}_{Y,x_Y}$ gehören. Sei nun $\mathcal{I}$ eine quasi-kohärente Idealgarbe von Y mit $\mathcal{I}_{Y,x_Y} = (u,t)$ in $\mathcal{O}_{Y,x_Y}$ und sei $\pi : \widetilde{Y} \to Y$ die Aufblasung von Y entlang $\mathcal{I}$. Nach Bemerkung A.4.14 ist $Z = \widetilde{Y}$ integer und π eigentlich und birational. Also ist Z ein Element des inversen Systems $\mathcal{D}$. Sei nun $x_Z = t_Z(x)$. Das Urbild von $\mathcal{I}$ unter π ist nach Korollar A.4.18 eine invertierbare Garbe und damit ist $\mathcal{I}\mathcal{O}_{Z,x_Z}$ durch nur ein reguläres Element und damit von u oder t erzeugt. Ist $\mathcal{I}\mathcal{O}_{Z,x_Z}$ von u erzeugt, folgt $s^{-1} = t/u \in \mathcal{O}_{Z,x_Z} \subseteq R$ und andernfalls ist $s \in \mathcal{O}_{Z,x_Z} \subseteq R$. Damit folgt die Behauptung. □

Bemerkung 3.4.4 (Chow's Lemma)**.** Um den projektiven Limes $\mathcal{X} = \varprojlim_{\mathcal{D}} Y$ zu berechnen, reicht es eine kofinale Teilmenge $\mathcal{D}'$ von $\mathcal{D}$ zu betrachten, d.h. eine Teilmenge mit der Eigenschaft, dass für jedes Y in $\mathcal{D}$ ein Y' in $\mathcal{D}'$ existiert mit $Y \prec Y'$. Betrachten wir die vollständigen Modelle von K/A im inversen System $\mathcal{C}$, so sagt Chows Lemma (siehe Bemerkung A.2.14), dass das inverse System der projektiven Modellen $\mathcal{P}$ darin kofinal ist, d.h. $\mathfrak{X} = \varprojlim_{\mathcal{P}} X$.

Korollar 3.4.5. *Sei $\mathfrak{X}$ der Riemann-Zariski-Raum von K/A und $\mathcal{P}$ ein inverses System von projektiven Modellen von K/A. Dann induziert die in Satz 3.4.3 definierte Abbildung δ einen Homöomorphismus bezüglich der konstruierbaren Topologie*

$$\mathfrak{X}_{\mathrm{cons}} \to \varprojlim_{\mathcal{P}} X_{\mathrm{cons}}.$$

Beweis. Nach [Olb15, Prop. 3.1] ist der unterliegende topologische Raum eines projektiven Modells X von K/A ein Spektralraum und die (stetige und surjektive) Abbildung $\delta_X : \mathfrak{X} \to X$ quasi-kompakt: Offenbar ist X ein T_0-Raum mit Basis quasikompakter offener Mengen. Es reicht also zu zeigen, dass für eine quasi-kompakte offene Teilmenge U von X das Urbild $\delta_X^{-1}(U)$ quasi-kompakt ist. Ohne Einschränkung sei U affin und damit existieren $f_1, \ldots, f_n \in K$, sodass $U = \{x \in X \mid f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}_{X,x}\}$. Es folgt, dass

$$\delta_X^{-1}(U) = \{w \in \mathfrak{X} \mid w(f_i) \geq 0 \text{ für alle } = 1, \ldots n\}$$

und damit quasi-kompakt ist. Mit Bemerkung 3.3.5 folgt die Behauptung. □

[1] Es genügt, eine Zusammenhangskomponente von $Y' \times_X Y''$ zu wählen

Kapitel 4

Krull-Bewertungen auf regulären arithmetischen Flächen

4.1 Arithmetische Flächen

Der folgende Abschnitt orientiert sich weitgehend an [Liu02]. Zunächst werden ein paar Begriffe eingeführt.

Sei X ein Schema. Ein Element D von $\Gamma(X, \mathcal{K}_X^\times / \mathcal{O}_X^\times)$ heißt *Cartier-Divisor* auf X. Als solches kann D durch lokale Daten $\{(U_i, f_i)\}_i$ beschrieben werden, wobei die $U_i \subseteq X$ eine offene Überdeckung von X bilden und f_i Quotient regulärer Elemente von U_i ist und $f_i|_{U_i \cap U_j} \in f_j|_{U_i \cap U_j} \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^\times$. Ein Cartier-Divisor heißt *effektiv*, wenn er im Bild der kanonischen Abbildung $\Gamma(X, \mathcal{O}_X \cap \mathcal{K}_X^\times) \to \Gamma(X, \mathcal{K}_X^\times / \mathcal{O}_X^\times)$ liegt. Einem Cartier-Divisor D mit den lokalen Daten $\{(U_i, f_i)\}_i$ lässt sich eine invertierbare Untergarbe $\mathcal{O}_X(D)$ von $\mathcal{K}_X$ zuordnen, gegeben durch $\mathcal{O}_X(D)|_{U_i} = f_i^{-1} \mathcal{O}_X|_{U_i}$. Für eine offene Menge $U \subseteq X$ bezeichne $D|_U$ die Einschränkung (als Schnitt der Garbe $\mathcal{K}_X^\times / \mathcal{O}_X^\times$) auf U.

Für einen noetherschen lokalen Integritätsring A von Dimension 1 und ein reguläres Element $f \in A$ ist $\operatorname{length}_A(A/fA) < \infty$. Die Abbildung $f \mapsto \operatorname{length}_A(A/fA)$ setzt sich zu einem Gruppenhomomorphismus $\operatorname{Quot}(A)^\times \to \mathbb{Z}$ fort, dessen Kern $A^\times$ enthält. Wir erhalten den Gruppenhomomorphismus

$$\operatorname{mult}_A : \operatorname{Quot}(A)^\times / A^\times \to \mathbb{Z}.$$

Ist X nun ein lokal noethersches, integres Schema und D ein Cartier-Divisor auf X, dann ist für jeden Punkt $x \in X$ von Kodimension 1 der Halm von D in x ein Element von $(\mathcal{K}_X^\times / \mathcal{O}_X^\times)_x = \operatorname{Quot}(\mathcal{O}_{X,x})^\times / \mathcal{O}_{X,x}^\times$ und es lässt sich die *Multiplizität* von D in x definieren als $\operatorname{mult}_x(D) := \operatorname{mult}_{\mathcal{O}_{X,x}}(D_x)$. Sei U eine offene dichte Teilmenge von X sodass $D|_U = 0$. Dann ist jeder Kodimension 1-Punkt $x \in X$ mit $\operatorname{mult}_x(D) \neq 0$ ein generischer Punkt von $X \setminus U$ und damit gibt es für jede affine offene Teilmenge von X nur endlich viele Punkte von Kodimension 1 mit $\operatorname{mult}_x(D) \neq 0$.

Sei X nun ein noethersches integres Schema. Ein *Primzykel* auf X ist eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge von X. Ein *Zykel* Z auf X ist ein Element der direkten Summe $\mathbb{Z}^{(X)}$ und kann wegen der kanonischen Bijektion von Punkten und irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen von X via $x \mapsto \overline{\{x\}}$ geschrieben werden als

$$Z = \sum_{x \in X} n_x \left[\overline{\{x\}} \right],$$

wobei n_x die *Multiplizität* $\operatorname{mult}_x(Z)$ von Z in x bezeichne. Ein Zykel von Kodimension 1 auf X bezeichnen wir als *Weil-Divisor* auf X. Irreduzible Weil-Divisoren nennen wir auch *Primdivisoren*. Es ist möglich, jedem Cartier-Divisor D einen Weil-Divisor

zuzuordnen via
$$[D] = \sum_{x\in X, \dim \mathcal{O}_{X,x}=1} \mathrm{mult}_x(D)\left[\overline{\{x\}}\right].$$
In „guten“ Situationen, bspw. wenn X regulär ist, sind diese beiden Arten von Divisoren äquivalent, siehe [Liu02, §7.2].

Sei X ein reguläres, noethersches, zusammenhängendes Schema von Dimension 2 und sei D ein effektiver Cartier-Divisor auf X. Dann ist $\mathcal{O}_X(-D)$ eine Idealgarbe von $\mathcal{O}_X$ und D ist natürlicherweise ausgestattet mit der abgeschlossenen Unterschema-Struktur von $V(\mathcal{O}_X(-D))$ in X. Für zwei effektive Cartier-Divisoren D und E auf X ohne gemeinsame irreduzible Komponenten und einen abgeschlossenen Punkt $x \in X$ bezeichnet
$$i_x(D,E) = \mathrm{length}_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{X,x}/\left(\mathcal{O}_X(-D)_x + \mathcal{O}_X(-E)_x\right)$$
die *Schnittmultiplizität* von D und E in x. Dies ist eine nicht-negative ganze Zahl und es gilt genau dann $i_x(D,E) = 0$, wenn $x \notin \mathrm{Supp} D \cap \mathrm{Supp} E$.

Wir sagen ein effektiver Cartier-Divisor D besitzt *strikte normale Überkreuzungen* an einem Punkt $x \in X$, wenn ein System von Parametern $f_1, \ldots, f_n$ auf X in x existiert, ein $0 \le m \le n$ und $r_1, \ldots, r_m \ge 1$, sodass $\mathcal{O}_X(-D)_x$ erzeugt ist von dem Produkt $f_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot f_m^{r_m}$. Wir sagen, dass D strenge normale Überkreuzungen besitzt, wenn D an allen Punkten $x \in X$ strikte normale Überkreuzungen besitzt.

Zwei verschiedene Primdivisoren D und E treffen sich genau dann transversal in $x \in \mathrm{Supp} D \cap \mathrm{Supp} E$, wenn $i_x(D,E) = 1$. Dies ist ferner äquivalent dazu zu fordern, dass D und E regulär in x sind und $T_{D,x} \oplus T_{E,x} = T_{X,x}$. Siehe [Liu02, §9.1] für Details.

Definition 4.1.1 (arithmetische Fläche)**.** Sei S ein Dedekindschema, d.h. S ist integer, separiert, noethersch, normal und $\dim S = 1$. Wir nennen ein integres, flaches, eigentliches Schema $\tau : X \to S$ von Dimension 2 eine *arithmetische Fläche über S*. Man bemerke, dass die Flachheit von τ unter der Annahme der restlichen Voraussetzungen äquivalent zur Surjektivität von τ ist. Den generischen Punkt von S notieren wir mit η und es bezeichne X_η die *generische Faser* von X. Die Faser X_s eines abgeschlossenen Punktes $s \in S$ bezeichnen wir als *abgeschlossene Faser*. Ein Morphismus arithmetischer Flächen über S ist ein Morphismus von S-Schemata.

Theorem 4.1.2 (Lichtenbaum [Lic68] Thm. 2.8)**.** *Sei $S = \mathrm{Spec}\, A$ ein affines Dedekindschema und $X \to S$ ein flacher eigentlicher Morphismus mit Fasern von Dimension 1. Angenommen X ist regulär. Dann ist τ projektiv.*

Bezeichne von nun an $k = K(S)$ den Funktionenkörper von S. Dann ist die generische Faser X_η eine integre Kurve über k und genau dann normal, wenn X normal ist. Für jedes $s \in S$ ist die Faser X_s eine projektive Kurve über $\kappa(s)$. Eine arithmetische Fläche ist also gefasert in Kurven und nach dem Theorem von Lichtenbaum sind reguläre arithmetische Flächen über affinen Schemata projektiv. Mit dem folgenden Resultat können wir zeigen, dass die Fasern einer arithmetischen Fläche zusammenhängend sind.

Theorem 4.1.3 (Zariskis Zusammenhangs-Theorem)**.** *Sei Y ein lokal noethersches Schema und $f : X \to Y$ projektiv. Angenommen $\mathcal{O}_Y \cong f_*\mathcal{O}_X$. Dann ist X_y für jedes $y \in Y$ geometrisch zusammenhängend.*

Beweis. Siehe [Liu02, Koro. 5.3.15]. □

Satz 4.1.4. *Sei $X \to S$ eine arithmetische Fläche und $s \in S$. Ist X_η geometrisch zusammenhängend, so ist auch X_s geometrisch zusammenhängend.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei $S = \operatorname{Spec} A$ für einen lokalen Ring A mit abgeschlossenem Punkt $s \in S$. Sei $B = \mathcal{O}_X(X)$ und $L = \mathcal{O}_X(X_\eta)$. Dann ist X kanonisch ein projektives Schema über B und nach Theorem 4.1.3 sind die Fasern von $X \to \operatorname{Spec} B$ geometrisch zusammenhängend. Da X_η geometrisch zusammenhängend ist, ist L nach Proposition A.2.9 eine endliche rein inseparable Erweiterung von $k = K(S)$ und damit $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ bijektiv. Somit ist X_s zusammenhängend. Sei nun κ' eine primitive Erweiterung von $\kappa(s)$. Es existiert ein diskreter Bewertungsring A', der endlich über A ist und den Restklassenkörper κ' besitzt. Damit ist $X_{A'}$ flach und projektiv über A' mit geometrisch zusammenhängender generischer Faser und folglich ist $X_{\kappa'}$ zusammenhängend. Da sich endliche Erweiterungen von $\kappa(s)$ aus primitiven Erweiterungen zusammensetzen, folgt die Behauptung. □

Satz 4.1.5. *Sei $\tau : X \to S$ eine arithmetischen Fläche.*

(i) Der Abschluss $D = \overline{\{x\}}$ eines abgeschlossenen Punktes x der generischen Faser ist eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge von X, die endlich und surjektiv über S ist.

(ii) Ist D eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge von X und $\dim D = 1$. *Dann ist D entweder eine irreduzible Komponente einer abgeschlossenen Faser von X oder $D = \overline{\{x\}}$ für einen abgeschlossenen Punkt x der generischen Faser von X.*

(iii) Für einen abgeschlossenen Punkt x_0 von X gilt: $\dim \mathcal{O}_{X,x_0} = 2$.

Beweis. (i) Als Abschluss einer irreduziblen Teilmenge ist D irreduzibel. Da $D \neq X$, folgt $\dim D \leq 1$. Ferner ist $\tau(D) \subseteq S$ abgeschlossen und enthält η, also gilt $\tau(D) = S$. Da $\dim X_s = 1$ für alle $s \in S$, folgt $\dim X_s \cap D = 0$, da D sonst eine irreduzible Komponente von X_s enthalten würde. Damit ist $D \cap X_s$ endlich und $\tau|_D : D \to S$ ist projektiv und quasi-endlich, also nach Korollar A.3.13 endlich.

(ii) Das Bild von D unter τ ist eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge von S. Besteht $\tau(D)$ nur aus einem abgeschlossenen Punkt $s \in S$, dann gilt $D \subseteq X_s$ und aus Dimensionsgründen muss es sich um eine irreduzible Komponente von X_s handeln. Andernfalls muss $\tau(D) = S$ gelten und damit $x \in D$ für ein $x \in X_\eta$. Aus Dimensionsgründen folgt $D = \overline{\{x\}}$.

(iii) Weil τ eigentlich ist, ist $\tau(x_0) = s \in S$ abgeschlossen und mit (A.3) folgt:

$$\dim \mathcal{O}_{X,x_0} = \dim \mathcal{O}_{X_s,x_0} + \dim \mathcal{O}_{S,s} = 2.$$

□

Definition 4.1.6 (vertikale und horizontale Divisoren)**.** Sei $\tau : X \to S$ eine arithmetische Fläche und D ein Primdivisor auf X. Wir sagen, D ist *horizontal*, wenn $\tau|_D : D \to S$ surjektiv (also endlich) ist. Ist $\tau(D)$ reduziert zu einem Punkt, so nennen wir D *vertikal*. Ein Weil-Divisor heißt *horizontal* (bzw. *vertikal*), wenn es seine Komponenten sind. Ein Cartier-Divisor heißt *horizontal* (bzw. *vertikal*), wenn es sein assoziierter Weil-Divisor ist.

Sei $X \to S$ eine normale arithmetische Fläche, $s \in S$ und $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ die irreduziblen Komponenten von X_s mit den generischen Punkten ξ_i. Dann gilt die folgende Gleichheit von Weil-Divisoren:

$$X_s = \sum_{1 \leq i \leq r} e_i \Gamma_i,$$

wobei e_i die Multiplizität von Γ_i in X_s bezeichne, d.h. $e_i = \operatorname{length}(\mathcal{O}_{X_s,\xi_i})$. Ist π das Uniformisierende des diskreten Bewertungsrings $\mathcal{O}_{S,s}$, dann gilt $e_i = v_{\Gamma_i}(\pi)$.

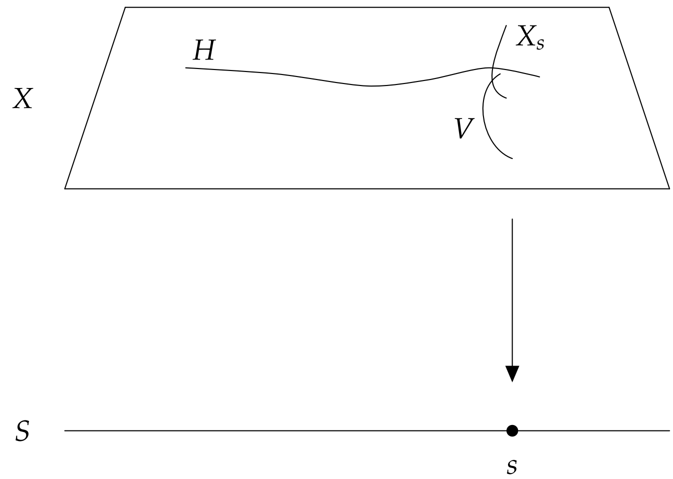


ABBILDUNG 4.1: Horizontaler Divisor H und vertikaler Divisor V.

Bemerkung 4.1.7. Sei $X \to S$ eine normale arithmetische Fläche und $S = \operatorname{Spec} R$, wobei R einen diskreten Bewertungsring zur Bewertung v mit Restklassenkörper $\kappa = \kappa(v)$ bezeichne. Jede irreduzible Komponente Γ_i von X_s ist ein irreduzibler vertikaler Divisor und liefert, weil X normal ist, eine diskrete Bewertung $v_{\Gamma_i} = v_i$ auf $K = K(X)$, sodass gilt $v_i(\pi) > 0$ für ein Uniformisierendes π von R und $v_i|_k = e_i \cdot v$. Per Definition ist der Restklassenkörper $\kappa(v_i)$ von v_i der Funktionenkörper von Γ_i und damit eine Körpererweitung von κ von Transzendenzgrad 1. Ist Γ ein horizontaler Divisor auf X, d.h. $\Gamma = \overline{\{x\}}$ für ein $x \in X_\eta$, so ist die assoziierte Bewertung v_Γ konstant auf $k^\times$ und der Restklassenkörper eine endliche Erweiterung über k.

In Anhang A.4 wird thematisiert, unter welchen Bedingungen Schemata eine Auflösung von Singularitäten zulassen. Das erwähnten Resultat von Lipman liefert:

Theorem 4.1.8 (Lipman). *Sei S ein exzellentes Dedekindschema und $X \to S$ eine arithmetische Fläche. Dann erlaubt X eine strikte Auflösung von Singularitäten.*

Beweis. Siehe [Liu02, Koro. 8.3.45]. □

Wir betrachten jetzt eigentliche birationale Morphismen zwischen regulären arithmetischen Flächen. In Anhang A.4 wird gezeigt, dass die Aufblasung eines regulären noetherschen Schemas in einem abgeschlossenen regulären Unterschema regulär ist und der Aufblasungsmorphismus projektiv und birational ist. Zwar entspricht für ein quasi-projektives Schema X jeder projektive birationale Morphismus $f : Z \to X$ der Aufblasung von X in einem abgeschlossenen Unterschema (Satz A.4.21), im Fall regulärer arithmetischer Flächen faktorisiert ein solcher Morphismus jedoch sogar in besonders „gute“ Aufblasungen – nämlich solche in abgeschlossenen Punkten.

Theorem 4.1.9 (Faktorisierungstheorem). *Sei S ein Dedekindring und $f : X \to Y$ ein eigentlicher birationaler Morphismus von regulären arithmetischen Flächen über S. Dann setzt sich f zusammen aus einer endlichen Folge von Aufblasungen entlang abgeschlossener Punkte.*

Beweis. Siehe [Liu02, Thm. 9.2.2]. □

Sei $f : X \to Y$ wie zuvor. Bezeichne W die Vereinigung aller nicht-leeren offenen Mengen V sodass $f^{-1}(V) \to V$ ein Isomorphismus ist. Dann bezeichnen wir

$E := X \setminus f^{-1}(W)$ auch als *exzeptionelle Menge.* Ein Primdivisor E auf X heißt *exzeptioneller Divisor* (oder (-1)-*Kurve*), wenn eine reguläre arithmetische Fläche Y über S und ein S-Morphismus $g : X \to Y$ existiert, sodass $X \setminus E \to Y \setminus g^{-1}(E)$ ein Isomorphismus und $g(E)$ ein Punkt ist. Damit ist $g : X \to Y$ die Aufblasung von Y in dem abgeschlossenen Punkt $f(E)$ mit exzeptionellen Divisor E. Aus Satz A.4.20 folgt:

Proposition 4.1.10. *Sei Y eine reguläre arithmetische Fläche über S und $g : X \to Y$ die Aufblasung eines abgeschlossenen Punktes $y \in Y$. Dann erfüllt der exzeptionelle Divisor $E := X_y$ die Eigenschaft*

$$E \cong \mathbb{P}^1_{\kappa(y)} \quad \text{und} \quad \kappa(y) = \Gamma(E, \mathcal{O}_E).$$

Mit jeder Aufblasung von Y in einem abgeschlossenen Punkt wächst die Anzahl der Divisoren in der exzeptionellen Menge also um eins. Ist diese also irreduzibel, so ist ein Morphismus wie in Theorem 4.1.9 die Aufblasung von Y in einem abgeschlossenen Punkt y.

Satz 4.1.11. *Seien $X \to S$ und $Y \to S$ reguläre arithmetische Flächen und seien X und Y birational. Dann existiert eine reguläre arithmetische Fläche Z über S ist, sodass das folgendes Diagramm*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

kommuntiert. Genauer lässt sich nach Voraussetzung eine offene Menge U finden, die sich als Teilmenge von X und Y auffassen lässt, und man betrachtet den Abschluss Z_0 von U in $X \times_S Y$. Gesuchtes Z ergibt sich dann als Auflösung der Singularitäten von Z_0.

Es stellt sich heraus, dass gefaserte Flächen über (exzellenten) Dedekindschemata nicht nur strikte Auflösungen von Singularitäten zulassen, sondern wir ferner fordern können, dass die abgeschlossenen Fasern strenge normale Überkreuzungen besitzen, d.h. die irreduziblen Komponenten glatt sind und sich höchstens paarweise transversal schneiden. Dies kann man für den Fall einer ebenen Kurve in Beispiel A.4.23 sehen. Ist $X \to S$ eine reguläre arithmetische Fläche, so sagen wir, $X \to S$ besitzt *strikte normale Überkreuzungen*, wenn für jeden abgeschlossenen Punkt s die Faser X_s in X strikte normale Überkreuzungen besitzt.

Satz 4.1.12 (Eingebettete Auflösung). *Sei $X \to S$ eine reguläre arithmetische Fläche mit nur endlich vielen singulären Fasern. Dann existiert ein projektiver birationaler Morphismus $X' \to X$, sodass $X' \to S$ eine reguläre arithmetische Fläche mit strikten normalen Überkreuzungen ist.*

Beweis. Siehe [Liu02, Thm. 9.2.31]. □

Normale arithmetische Flächen sind Modelle projektiver, normaler, zusammenhängender Kurven im folgenden Sinne:

Definition 4.1.13 (Modell). Sei S ein Dedekindschema mit Funktionenkörper k und X eine normale, zusammenhängende, projektive Kurve über k. Wir nennen eine normale arithmetische Fläche $\mathscr{X} \to S$ zusammen mit einem Isomorphismus $f : \mathscr{X}_\eta \simeq$

X ein *Modell von X über S*. Ist $\mathscr{X}$ regulär, so nennen wir es *reguläres Modell von X über S*. Allgemeiner sagen wir, ein Modell $(\mathscr{X}, f)$ erfüllt eine Eigenschaft (P), wenn $\mathscr{X} \to S$ die Eigenschaft (P) erfüllt. Ein Morphismus $\mathscr{X} \to \mathscr{X}'$ zweier Modelle von X ist ein Morphismus von S-Schemata, der kompatibel ist mit den Isomorphismen $\mathscr{X}_\eta \simeq X$ und $\mathscr{X}'_\eta \simeq X$.

Für eine solche Kurve X existieren Modelle über S: Dafür wähle man beispielsweise eine projektive Einbettung von X in $\mathbb{P}^n_k$ und dann ist der Zariski-Abschluss in $\mathbb{P}^n_S$ eine arithmetische Fläche mit entsprechender generischen Faser.

Beispiel 4.1.14. Sei $\mathfrak{o} = \mathbb{Z}_p$, $k = \mathbb{Q}_p$ und $X = \mathbb{P}^1_k$. Dann ist ein normales Modell von X über $\mathfrak{o}$ gegeben durch $\mathscr{X} = \mathbb{P}^1_{\mathfrak{o}}$ mit kanonischem Morphismus der generischen Faser zu X. Die spezielle Faser besitzt eine irreduzible Komponente, welche isomorph zu $\mathbb{P}^1_\kappa$ ist, wobei $\kappa = \mathbb{F}_p$ den Restklassenkörper von $\mathfrak{o}$ bezeichne.

Die zuvor diskutierten Resultate zeigen jedoch, dass unter gewissen Voraussetzungen an das Dedekindschema S besonders „gute“ Modelle existieren, d.h. reguläre Modelle mit strikten normalen Überkreuzungen.

4.2 Bewertungszoo zweidimensionaler semi-lokaler Körper

Sei nun k eine endliche Erweiterung des p-adischen Zahlenkörpers $\mathbb{Q}_p$. Bezeichne v die kanonische Bewertung auf k mit vollständigem diskreten Bewertungsring $\mathfrak{o}$ und perfektem Restklassenkörper $\kappa = \kappa(v)$. Sei ferner K der Funktionenkörper einer glatten, projektiven, geometrisch zusammenhängenden Kurve X über k.

Wir untersuchen im Folgenden den Raum

$$\mathrm{Val}_{\mathfrak{o}}(K) = \mathrm{Val}_k(K) \cup \mathrm{Val}_v(K)$$

der Bewertungen w auf K, dessen Einschränkung auf k entweder trivial oder v ist.

Solche Räume wurden in Kapitel 3 bereits in größerer Allgemeinheit diskutiert. Insbesondere haben wir gesehen, dass das Bewertungskriterium für Eigentlichkeit für jede Bewertung $w \in \mathrm{Val}_{\mathfrak{o}}(K)$ und jedes Modell $\mathscr{X}$ von X über $\operatorname{Spec} \mathfrak{o}$ eine kanonische Abbildung $\operatorname{Spec} R_w \to \mathscr{X}$ induziert, die den abgeschlossenen Punkt von $\operatorname{Spec} R_w$ auf das Zentrum x_w von w in $\mathscr{X}$ schickt. Abbildungen zwischen den verschiedenen Modellen, die die Identität auf X sind, respektieren die Zentren einer Bewertung. Die Menge $\{\mathscr{X}_i\}$ von Modellen ist partiell geordnet bezüglich Dominanz-Relation und in Satz 3.4.3 wurde gezeigt, dass die induzierte Abbildung

$$\delta : \mathrm{Val}_{\mathfrak{o}}(K) \to \varprojlim_i \mathscr{X}_i \tag{4.1}$$

(sowohl in der Zariski- als auch in der konstruierbaren Topologie) ein Homöomorphismus ist. Wir erinnern uns ferner daran, dass die Zentren der Bewertung $w \in \mathrm{Val}_{\mathfrak{o}}(K)$ den Bewertungsring $R_w = \varinjlim \mathcal{O}_{\mathscr{X},x_w}$ festlegen.

Bezeichne π ein Uniformisierendes des Bewertungsrings $\mathfrak{o}$. Vermöge δ kann die in der konstruierbaren Topologie abgeschlossene Teilmenge

$$\mathrm{Val}_v(K) = \{w \in \mathrm{Val}_{\mathfrak{o}}(K) \mid w(\pi) > 0\}$$

mit der Teilmenge $\varprojlim \mathscr{X}_{\kappa,\mathrm{cons}} \subset \varprojlim \mathscr{X}_{\mathrm{cons}}$ identifiziert werden, wobei $\mathscr{X}_\kappa = \mathscr{X} \times_{\operatorname{Spec} \mathfrak{o}} \operatorname{Spec} \kappa$ die spezielle Faser des Modells $\mathscr{X}$ bezeichne.

Unter beschriebenen Voraussetzungen reicht es, sich auf besonders „gute“ Modelle einzuschränken: Gemäß Definition 4.1.13 ist ein *reguläres Modell mit strikten normalen Überkreuzungen* von X über $\mathfrak{o}$ eine reguläre arithmetische Fläche $\tau : \mathscr{X} \to \operatorname{Spec} \mathfrak{o}$, sodass die reduzierte spezielle Faser $\mathscr{X}_{\kappa,\mathrm{red}}$ ein Divisor mit strikten normalen Überkreuzungen auf $\mathscr{X}$ ist, zusammen mit einem k-Isomorphismus zwischen X und der generischen Faser $\mathscr{X}_k$. Solche Modelle existieren: Nach Korollar 4.1.8 existiert für eine arithmetische Fläche $\mathscr{X}$ über $\operatorname{Spec} \mathfrak{o}$ ein eigentlicher birationaler Morphismus arithmetischer Flächen $\mathscr{X}' \to \mathscr{X}$, wobei $\mathscr{X}'$ regulär ist. Wir können nach Satz 4.1.12 die reguläre arithmetische Fläche $\mathscr{X}'$ ferner so wählen, dass ihre reduzierte spezielle Faser $\mathscr{X}'_\kappa$ ein Divisor mit strikten normalen Überkreuzungen ist. Nach Theorem 4.1.2 sind solche Modelle sogar projektiv über $\operatorname{Spec} \mathfrak{o}$. Reguläre Modelle mit strikten normalen Überkreuzungen sind ferner kofinal unter den projektiven Modellen von X über $\mathfrak{o}$. Einzelheiten dieser Resultate sollen hier nicht diskutiert werden. Eine ausführliche Diskussion und weitere Referenzen finden sich bspw. in [Liu02, §9].

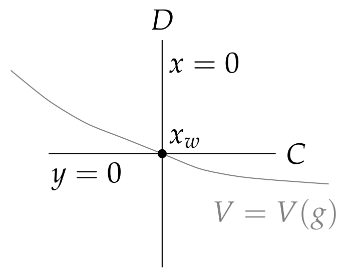
Wenn im Folgenden von Modellen von X über $\mathfrak{o}$ gesprochen wird, sind reguläre Modelle mit strikten normalen Überkreuzungen gemeint.

Die kanonische Identifikation (4.1) zeigt, dass wir $\mathfrak{o}$-Bewertungen von K untersuchen können, in dem wir die Zentren einer Bewertung in dem System von Modellen von X über $\mathfrak{o}$ betrachten. Das nächste Ziel ist es, aus der Geometrie der Modelle Informationen über die algebraische Struktur der Bewertungen zu gewinnen. Dabei wird Theorem 4.1.9, aber auch die soeben diskutierte Struktur der Modelle, eine wichtige Rolle spielen. Da sich Aufblasungen regulärer arithmetischer Flächen in abgeschlossenen Punkten ähnlich verhalten wie die Aufblasung des $\mathbb{A}^2_k$ in einem Punkt, wollen wir zunächst folgendes Beispiel betrachten, um späteres Vorgehen (insbesondere in Hinblick auf den Divisions-Algorithmus) zu motivieren:

Beispiel 4.2.1. Sei k ein Körper und $\mathbb{A}^2_k = \operatorname{Spec} k[x,y]$ und bezeichne P den Ursprung. Wir betrachten das Koordinatenkreuz, das gegeben sei durch $C = V(y)$ und $D = V(x)$. Sei nun w eine nicht-triviale Bewertung von $k(x,y)$ mit

$$x \mapsto w(x) = d$$
$$y \mapsto w(y) = c$$

und Zentrum im Ursprung. Damit gilt insbesondere $d, c > 0$. Wie in Beispiel A.4.17



blasen wir nun $\mathbb{A}^2$ in P auf und betrachten die strikten Transformierten C' und D' von C und D. Bezeichne $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_P$ das maximale Ideal im Ursprung. Die Bewertung w nimmt in der Aufblasung $\widetilde{\mathbb{A}^2}$ ein Zentrum $\widetilde{x}_w$ an. Ist dies der generische Punkt des exzeptionellen Divisors $E = \operatorname{Proj}\left(\bigoplus_{t\geq 0} \mathfrak{m}^t/\mathfrak{m}^{t+1}\right)$, dann entspricht w der Verschwindungsordnung im Ursprung. Dies schließen wir an dieser Stelle aus. Dann kommen nur die in Abbildung 4.2 eingezeichneten Positionen in Frage: Entweder

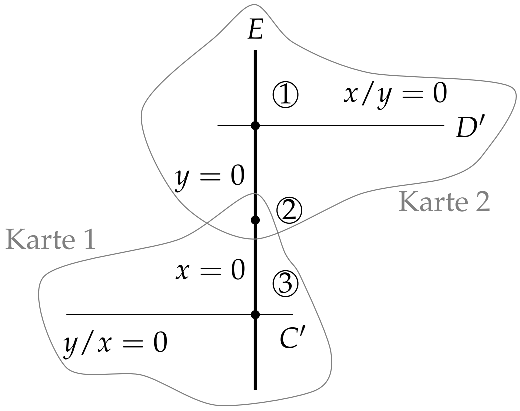


ABBILDUNG 4.2: Strikte Transformierte der Koordinatenachsen in der Aufblasung von $\mathbb{A}^2_k$ im Ursprung

liegt das Zentrum wieder auf einem Knoten, also in $C' \cap E$ bzw. $D' \cap E$, oder in einem glatten Ort auf dem exzeptionellen Divisor E. Wie in Beispiel A.4.17 hergeleitet, wird E in der Karte $U_1 = \operatorname{Spec} k[x, y/x]$ lokal beschrieben durch $x = 0$ und in der Karte $U_2 = \operatorname{Spec} k[x/y, y]$ durch $y = 0$, wie auch in Abbildung 4.2 eingezeichnet. Ist f das reguläre Element, das einen (Cartier-)Divisor lokal beschreibt, so liegt das Zentrum einer Bewertung w genau dann auf diesem Divisor, wenn $w(f) > 0$. Da $w(x/y) = w(x) - w(y) = d - c$ und $w(y/x) = c - d$, tritt Fall 1 genau dann ein, wenn $d = w(x) > w(y) = c$, Fall 3 genau dann, wenn $c > d$ und Fall 2 genau dann, wenn $c = d$ gilt.

Sei $V = V(g)$ eine Kurve in $\mathbb{A}^2$ durch den Ursprung. Bezeichne ℓ diejenige Ursprungsgerade in $\mathbb{A}^2$, die zu $\widetilde{x}_w$ gehört. Dann liegt das Zentrum $\widetilde{x}_w$ genau dann auf der strikten Transformierten V' von V, wenn ℓ im Tangentialkegel $C_{x_w}(V) = \operatorname{Spec}\left(\bigoplus_{t\geq 0} \mathfrak{m}^t/\mathfrak{m}^{t+1}\right)$ von V in x_w enthalten ist. Ist $g \in \mathfrak{m}^s \setminus \mathfrak{m}^{s+1}$, so gilt $v(g) > s \cdot e$ mit $e = \min\{v(x), v(y)\}$.

Angenommen wir befinden uns im Fall ③, d.h. das Zentrum $\widetilde{x}_w$ in der Aufblasung liegt auf der strikten Transformierten C' der x-Achse $C = V(y)$. Blasen wir erneut in $\widetilde{x}_w$ auf, dann liegt das nächste Zentrum genau dann auf der strikten Transformierten C'' von C, wenn $v(y/x) > v(x)$, d.h. $v(y) > 2 \cdot v(x)$. Angenommen die Zentren bleiben nach n sukzessiven Aufblasungen in dem vorherigen Zentrum auf der (sukzessive) strikten Transformierten von C. Für alle $1 \leq i \leq n$ ist die Bedingung, in der i-ten Aufblasung auf einer strikten Transformierten von C zu liegen $v(y/x^{i-1}) > v(x)$, also $v(y) > i \cdot v(x)$, da das Zentrum in der $(i-1)$-ten Aufblasung die lokalen Koordinaten $x, x/y^{i-1}$ besitzt. Angenommen, das $(n+1)$-te Zentrum erfüllt diese Bedingung nicht mehr. Dann liegt es entweder im glatten Ort (und $v(y) = (n+1) \cdot v(x)$) oder auf einem anderen Knoten (und $v(y) < (n+1) \cdot v(x)$).

Klassifizierung

Wir wenden uns nun der Klassifikation der $\mathfrak{o}$-Bewertungen von K zu. Resultate über die Fortsetzung von Bewertungen aus Abschnitt 2.3 geben uns eine grobe Idee, welche Arten von Bewertungen in diesem Kontext auftauchen können. Nach der Dimensionsungleichung (2.10) gilt für eine Bewertung $w \in \operatorname{Val}_{\mathfrak{o}}(K)$:

$$\dim(w) + \operatorname{rk}(w) \leq \dim(w) + \operatorname{rr}(w) \leq 2,$$

wobei die Dimension $\dim(w)$ von w definiert ist als $\operatorname{trdeg}(\kappa(w)/\kappa)$ bzw. $\operatorname{trdeg}(\kappa(w)/k)$, je nachdem, ob $w|_k = v$ oder trivial ist. Es bleiben also folgende Möglichkeiten:

(0) $\operatorname{rk}(w) = 0 = \operatorname{rr}(w) = 0$ und $\dim(w) = 0$ (triviale Bewertung von K),

(i) $\operatorname{rk}(w) = 1 = \operatorname{rr}(w) = 1$ und $\dim(w) = 1$,

(ii) $\operatorname{rk}(w) = 1 = \operatorname{rr}(w) = 1$ und $\dim(w) = 0$,

(iii) $\operatorname{rk}(w) = 1 < \operatorname{rr}(w) = 2$ und $\dim(w) = 0$,

(iv) $\operatorname{rk}(w) = 2 = \operatorname{rr}(w) = 2$ und $\dim(w) = 0$.

Wir definieren den *Typ* einer Bewertung $w \in \mathrm{Val}_{\mathfrak{o}}(K)$ wird als

$$\operatorname{ht}(w) := \varinjlim \operatorname{ht}(x_w) = \varinjlim \dim(\mathcal{O}_{\mathscr{X},x_w}),$$

d.h. als wohldefinierte Zahl 0, 1 oder 2, die gegeben ist durch die Höhe $\operatorname{ht}(x_w)$ des Zentrums x_w von w in allen hinreichend feinen Modellen $\mathscr{X}$. Die eindeutige Bewertung von Typ 0 ist die triviale Bewertung. Es sollen nun die anderen beiden Typen genauer unterschiedenen werden, wobei wir der Klassifikation von Pop und Stix in [PS11, A.1.] folgen.

Typ 1

Die Bewertungen w von Typ 1 werden auch *divisorielle Bewertungen* genannt. Es handelt sich um diskrete Bewertungen, die assoziiert sind zu einem Primdivisor D auf einem hinreichend feinen Modell, sodass der entsprechende Divisor erscheint. Dieser ist entweder vertikal und wir sagen, die entsprechende Bewertung w ist *von Typ 1v*, oder horizontal und wir sagen, die entsprechende Bewertung w ist *von Typ 1h*. Ist $w \in \mathrm{Val}_{\mathfrak{o}}(K)$ eine Bewertung von Typ 1v, so gilt $w|_k = v$, d.h. w setzt die kanonische Bewertung auf k fort. Der Restklassenkörper $\kappa(w)$ von w ist ein Funktionenkörper über κ von Transzendenzgrad 1. Ist $w \in \mathrm{Val}_{\mathfrak{o}}(K)$ eine Bewertung von Typ 1h, so ist $w|_k$ trivial und $\kappa(w)/\kappa$ eine endliche Erweiterung. Die Wertegruppe entspricht in beiden Fällen $\mathbb{Z}$ und $\operatorname{rk}(w) = \operatorname{rr}(w) = 1$.

Typ 2

Die restlichen Bewertungen w sind von Typ 2. Die Zentren x_w dieser Bewertungen müssen abgeschlossene Punkte in der speziellen Faser $\mathscr{X}_\kappa$ eines Modells $\mathscr{X}$ von X über $\mathfrak{o}$ sein. Man bemerke, dass sich damit der Restklassenkörper $\kappa(w)$ von w als direkter Limes über die Restklassenkörper $\kappa(x_w)$ der Zentren in den verschiedenen Modellen ergibt und damit als solcher eine algebraische Erweiterung von κ ist.

Wir untersuchen nun diese Bewertungen, indem wir Modelle sukzessive in ihren Zentren aufblasen. Da $\mathscr{X}_{\kappa,\mathrm{red}}$ strikte normale Überkreuzungen besitzt, kann das Zentrum einer Typ 2-Bewertung entweder auf einem vertikalen Divisor oder auf zwei sich transversal schneidenden vertikalen Divisoren liegen. In folgenden Abbildungen ist das mögliche Verhalten des Zentrums nach Aufblasung skizziert. Dabei schließen wir bereits aus, dass die Bewertung eigentlich von Typ 1 ist.

Für jede Bewertung α von Typ 1 definieren wir den Abstand von w und α auf einem Modell $\mathscr{X}$ als

$$\operatorname{dist}_{\mathscr{X}}(w,\alpha) = \inf \left\{ \begin{array}{c} \text{Anzahl irreduzibler Komponenten eines eindimensionalen} \\ \text{zusammenhängenden Unterschemas } Z \subseteq \mathscr{X} \text{ mit } x_w, x_\alpha \in Z \end{array} \right\}.$$

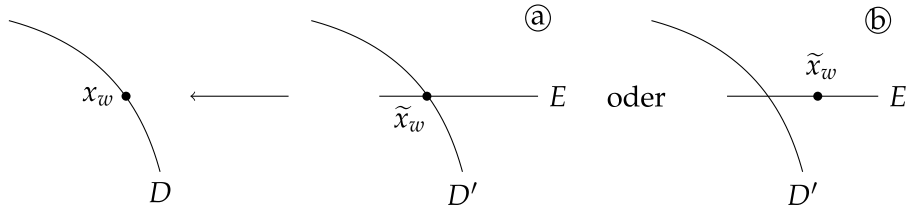


ABBILDUNG 4.3: Das Zentrum der Bewertung w liegt auf (genau) einem vertikalen Divisor (Fall 1).

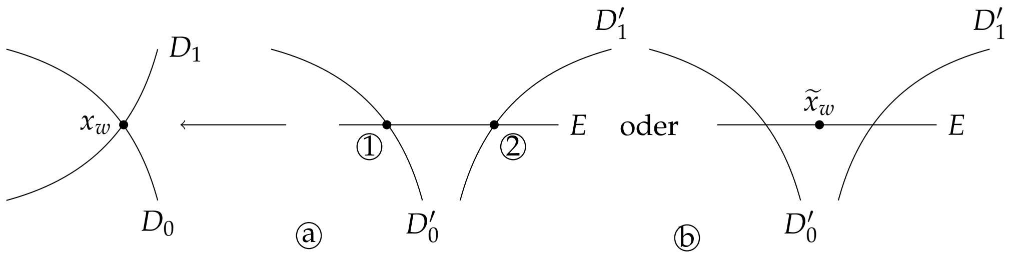


ABBILDUNG 4.4: Das Zentrum der Bewertung w liegt auf zwei sich transversal schneidenden vertikalen Divisoren (Fall 2).

Angenommen $\sup_{\mathscr{X}}(\mathrm{dist}_{\mathscr{X}}(w,\alpha)) < \infty$ gilt für alle Typ 1-Bewertungen α auf entsprechenden Modellen. Dann folgt bereits, dass die Zentren auf hinreichend feinen Modellen auf der strikten Transformierten eines Primdivisors liegen. Im nächsten Abschnitt zeigen wir, dass es sich dann um eine Rang 2-Bewertung handeln muss. Dann existiert eine eindeutige Bewertung α von Typ 1 und ein abgeschlossener Punkt y auf dem assoziierten Divisor Y_α, sodass w die Komposition von α und der mit y assoziierten Bewertung v_y auf dem Restklassenkörper von α ist. Damit ergibt sich für den Bewertungsring $R_w = \{x \in R_\alpha \mid \overline{x} \in \mathcal{O}_{Y_\alpha,y} \subseteq \kappa(y)\}$. Die Bewertung $w = v_y \circ \alpha$ heißt *Typ 2v* bzw. *Typ 2h*, wenn α vertikal bzw. horizontal ist. Da v_y eine diskrete Bewertung ist, folgt mit Satz 2.1.15, dass für die Wertegruppe von w gilt $\Gamma_w = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ mit lexikographischer Ordnung. Folglich gilt $\mathrm{rk}(w) = \mathrm{rk}(v) = 2$. Ferner gilt $w|_k = v$ und $\kappa(w)/\kappa$ ist endlich.

Die Bewertungen, für die es keine solchen Typ 1-Bewertungen gibt, werden als *unbeschränkt* bzw. *Typ 2u* bezeichnet.

Bezeichne nun mit α eine Bewertung von Typ 1v und mit Y_α den korrespondierenden Divisor auf einem hinreichend feinen Modell, dessen generischen Punkt wir (unter Notationsmissbrauch) ebenfalls mit α bezeichnen. Jeder abgeschlossene Punkt y in der reduzierten speziellen Faser $\mathscr{X}_{\kappa,\mathrm{red}}$ enthält Invarianten $(e_{y,\alpha}), f_y$, wobei das Tupel $(e_{y,\alpha})$ die Multiplizität der irreduziblen Komponenten der speziellen Faser $\mathscr{X}_\kappa$ bezeichne, in denen y liegt, d.h. $\alpha(\pi) = e_{y,\alpha}$, und $f_y = [\kappa(y) : \kappa]$ den Grad des Restklassenkörpers von y über κ bezeichne. Sei nun $x \in X = \mathscr{X}_k$ ein abgeschlossener Punkt der generischen Faser von $\mathscr{X}$, sodass $y \in \overline{\{x\}}$. Dann gilt für den Restklassenkörper $\kappa(x)$ nach [Liu02, Prop. 9.1.30]:

$$e_{\kappa(x)/k} = \sum_\alpha m_\alpha e_{y,\alpha},$$

wobei $m_\alpha \in \mathbb{N}$ sowie $f_y \mid f_{\kappa(x)/k} = [\kappa(x) : k]$.

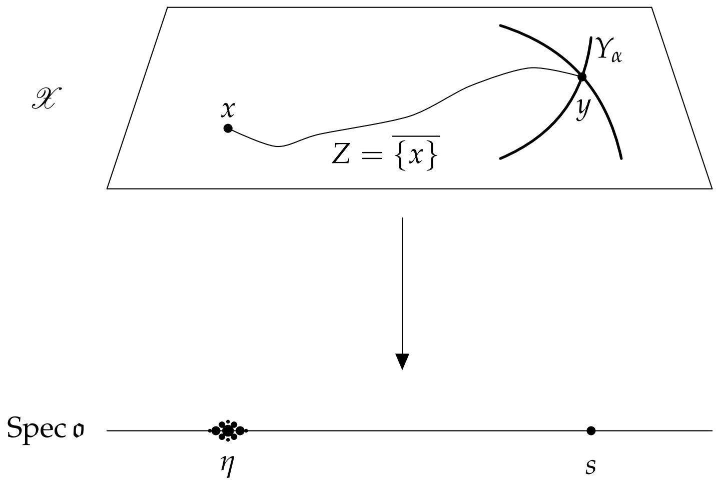


ABBILDUNG 4.5: Der Punkt x auf der generischen Faser spezialisiert zu einem abgeschlossenen Punkt y auf der speziellen Faser von $\mathscr{X}$.

Bläst man einen Punkt in einem Knoten zweier glatter Kurven auf, so entspricht die Multiplizität des exzeptionellen Divisors der Summe der Multipizitäten der beiden Kurven. Bläst man einen Punkt im glatten Ort einer Kurve auf, so entspricht die Multiplizität des exzeptionellen Divisors der Multiplizität der Kurve. Für eine Bewertung w von Typ 2u bleibt der Wert $\sum_\alpha e_{x_w,\alpha}$ also genau dann beschränkt, wenn die Zentren x_w in hinreichend feinen Modellen im glatten Ort der reduzierten speziellen Faser bleiben. Wir nennen diesen *Typ* $2u_{smooth}$ bzw. $2u_{sm}$.

Wir sagen eine unbeschränkte Bewertung w ist von *Typ* $2u_{node}$, wenn die Zentren in allen hinreichend feinen Modellen in einem Knoten der reduzierten speziellen Faser liegen.

Eine Bewertung von Typ 2u, die weder von Typ $2\mathrm{u}_{\mathrm{node}}$ noch vom Typ $2\mathrm{u}_{\mathrm{sm}}$ ist, wird als *Typ* $2u_{alternate}$ bzw. $2u_{alt}$ bezeichnet. Für eine solche Bewertung darf also die Folge von Zentren von w in sukzessiven Aufblasungen eines Modells $\mathscr{X}$ nur endliche Teilfolgen „knotiger" aufeinanderfolgender Zentren enthalten, muss jedoch unendlich viele dieser endlichen Teilfolgen besitzen, da sich die Zentren sonst ultimativ im glatten Ort der reduzierten speziellen Faser befinden.

Geometrie der Modelle

Um nun die algebraische Struktur dieser Fälle zu studieren, untersuchen wir die Folge der Zentren der sukzessiven Aufblasungen eines Modells $\mathscr{X}$. Wir orientieren uns dabei an [CA00, §8], welcher anknüpfend an Ideen Zariskis [Zar39] eine Klassifikation der Bewertungen eines Rings $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{S,P}$ liefert, wobei S eine komplexe (analytische) Fläche ist.

Sei $\mathscr{X} = \mathscr{X}^{(0)}$ ein festes Modell von X über $\mathfrak{o}$ und w eine nicht-triviale $\mathfrak{o}$-Bewertung von K. Bezeichne $p_0 = x_w$ das Zentrum von w in $\mathscr{X}$. Wir nehmen an, dass p_0 ein abgeschlossener Punkt auf der speziellen Faser ist und betrachten die Aufblasung von $\mathscr{X}$ in p_0, d.h. den Morphismus $\sigma_0 : \mathscr{X}^{(1)} = \widetilde{\mathscr{X}} \to \mathscr{X}$. Wir bezeichnen dabei den exzeptionellen Divisor als $E_{p_0} = E_{p_0}^{(1)} = \sigma_0^{-1}(p_0)$, die strikten Transformierten von Kurven C durch p_0 als $C^{(1)}$ und das Zentrum von w in $\mathscr{X}^{(1)}$ als p_1. Es gilt $p_1 \in E_{p_0}$. Entspricht p_1 dem generischen Punkt von E_{p_0}, so entspricht w der zu E_{p_0} assoziierten Bewertung $v_{E_{p_0}}$ und wir sagen, p_0 ist das *letzte Zentrum* von w in den sukzessiven Aufblasungen von $\mathscr{X}$. Ansonsten sind wir in einem der in Abbildung 4.3 und 4.4 visualisierten Fälle und blasen nun $\mathscr{X}^{(1)}$ in p_1 auf. Den Aufblasungsmorphismus bezeichnen wir als $\sigma_1 : \mathscr{X}^{(2)} \to \mathscr{X}^{(1)}$, den entstehenden exzeptionellen Divisor als $E_{p_1} = E_{p_1}^{(1)}$ und die strikten Transformierten der Divisoren E_{p_0} bzw. $C^{(1)}$ als $E_{p_0}^{(2)}$ bzw. $C^{(2)}$. Durch Iteration dieses Vorgehens erhalten wir eine Folge von Aufblasungen

$$\sigma^{(i)} : \quad \mathscr{X}^{(i)} \xrightarrow{\sigma_{i-1}} \mathscr{X}^{(i-1)} \xrightarrow{\sigma_{i-2}} \dots \xrightarrow{\sigma_1} \mathscr{X}^{(1)} = \widetilde{\mathscr{X}} \xrightarrow{\sigma_0} \mathscr{X}^{(0)} = \mathscr{X},$$

wobei $\sigma_k : \mathscr{X}^{(k+1)} \to \mathscr{X}^{(k)}$ für $k = 0, \dots, i-1$ die Aufblasung von $\mathscr{X}^{(k)}$ im k-ten Zentrum p_k bezeichne. Für $j \geq 2$ bezeichnen wir ferner mit $E_{p_k}^{(j)} \subseteq \mathscr{X}^{(j+k)}$ die strikte Transformierte von $E_{p_k} = E_{p_k}^{(1)} = \sigma_k^{-1}(p_k) \subseteq \mathscr{X}^{(k+1)}$ nach $(j-1)$ sukzessiven Aufblasungen. Ist das nächste Zentrum der generische Punkt von E_{p_i}, so sagen wir, p_i ist das letzte Zentrum von w in der Folge sukzessiver Aufblasungen von $\mathscr{X}$. Ansonsten iterieren wir das Verfahren. Wir erhalten eine endliche oder unendliche Folge $\mathcal{P} = \{p_i\}_{i\geq 0}$ von Zentren der Bewertung w. Wir bezeichne nun für alle $i > 0$ mit $\mathcal{O}_{p_i} = \mathcal{O}_{\mathscr{X}^{(i)},p_i}$ den lokalen Ring im Zentrum der i-ten Aufblasung von $\mathscr{X}$ und mit $\mathfrak{m}_{p_i}$ dessen maximales Ideal. Wir setzen ferner $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{p_0}$ und $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{p_0}$.

Für $i \geq 0$ bezeichne nun

$$e_{p_i}(w) := \min\{w(f) \mid f \in \mathfrak{m}_{p_i}\} \in \Gamma_w \tag{4.2}$$

die *Multiplizität* von w in dem i-ten Zentrum p_i, sofern dieses existiert.

Bemerkung 4.2.2. Man bemerke, dass das Minimum in (4.2) angenommen wird: Sind f_1 und f_2 Lifts einer Basis von $\mathfrak{m}_{p_i}/\mathfrak{m}_{p_i}^2$, so gilt

$$\min\{w(f) \mid f \in \mathfrak{m}_{p_i}\} = \min\{w(f_1), w(f_2)\}.$$

Beispiel 4.2.3. Angenommen $p = p_0$ ist das letzte Zentrum und bezeichne E den exzeptionellen Divisor der Aufblasung in p. Dann ist w die zu E assoziierte Bewertung und wir schreiben $w = v_E$. Dies ist nichts anderes als die Verschwindungsordnung in p, d.h. für $f \in \mathfrak{m}$ gilt:

$$w(f) = v_E(f) = \operatorname{ord}_p(f) = \max\{s \mid f \in \mathfrak{m}^s\}.$$

Dass dies tatsächlich eine Bewertung definiert, sieht man unmittelbar daran, dass für $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = (x, y)$ gilt

$$\bigoplus_{t\geq 0} \mathfrak{m}^t/\mathfrak{m}^{t+1} \cong \kappa(p)[\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2] = \kappa(p)[x, y]$$

und es sich damit um eine $\kappa(p)$-Algebra handelt. Ferner ist die Multiplizität von w in p in diesem Fall notwendigerweise 1.

Gilt $p_n \in E_{p_k}^{(j)}$ für ein $j \geq 1$ und $n = k + j$, so sagen wir auch, dass p_n *proximativ* zu p_k ist. Es gilt also Folgendes:

- Für alle $i \geq 0$ ist p_{i+1} proximativ zu p_i.
- Ist für ein $n \geq k + 2$ das Zentrum p_n proximativ zu p_k (und damit insbesondere knotig), so sind auch alle $p_{n-1}, \dots, p_{k+1}$ proximativ zu p_k. Dann ist p_n nur zu p_{n-1} und p_k und zu keinem anderen der Zentren $p_{n-2}, \dots, p_{k+1}$ proximativ.

- Es kann höchstens einen Punkt p_k geben, zu dem unendlich viele Punkte in $\mathcal{P}$ proximativ sind.
- Liegt p_0 in $\mathscr{X}$ auf zwei vertikalen Primdivisoren, so können unendlich viele Zentren auf den sukzessiven strikten Transformierten höchstens einer dieser Divisoren liegen. Es gibt ferner höchstens einen horizontalen Primdivisor, auf dessen sukzessiven Transformierten unendlich viele Zentren aus $\mathcal{P}$ liegen können. In diesen Fällen haben wir es mit einer Bewertung von Typ 2v bzw. 2h zu tun.

Satz 4.2.4 (Noether-Formel). *Sei $f \in \mathfrak{m}$ und C eine Kurve mit $C = V(f)$ in $\mathcal{O}$. Dann gilt*

$$w(f) = \sum_{i=0}^{r} \mathrm{mult}_{p_i}(C^{(i)}) e_{p_i}(w) + \delta \in \Gamma_w,$$

wobei $\delta = 0$, wenn p_r das letzte Zentrum von w ist. Ansonsten ist δ die Bewertung der lokalen Beschreibung der (sukzessiven) strikten Transformierten von C im Zentrum p_{r+1}, d.h. $\delta = w(f^{(r+1)})$ für $C^{(r+1)} = V(f^{(r+1)})$ nahe p_{r+1}. Liegen nur endlich viele Zentren aus $\mathcal{P}$ auf den sukzessiven strikten Transformierten von C, so gilt

$$w(f) = \sum_{q} m_q e_q(w), \tag{4.3}$$

wobei die Summe über alle Zentren q von w läuft und m_q die Multiplizität dieser Transformierten von C in q bezeichne. In diesem Fall ist die Formel bekannt als Noether-Formel.

Beweis. Es reicht, die Aussage für $r = 0$ zu zeigen und der Rest folgt dann induktiv. Setze $e = e_{p_0}(w)$ und $E = E_{p_0}$. Ist $p = p_0$ das letzte Zentrum, so ist $w = v_E$ (siehe Beispiel 4.2.3) und für $f \in \mathfrak{m}$ gilt

$$w(f) = v_E(f) = \mathrm{mult}_{p_0}(C),$$

was der Behauptung entspricht, da in diesem Fall $e = 1$ gilt.

Angenommen das Zentrum $q = p_1$ in $\mathscr{X}^{(1)}$ existiert. Wir wählen reguläre Parameter x, y, sodass $\mathfrak{m} = (x, y)$ und ohne Einschränkung sei $w(x) \leq w(y)$. Dann liegt q in der Karte mit den Koordinaten x und $z = y/x$, in der der exzeptionelle Divisor lokal beschrieben ist durch $x = 0$. Bezeichne nun $\widetilde{f}$ die Gleichung der strikten Transformierten $\widetilde{C}$ in q. Die totale Transformierte von C ist $\sigma^*(C) = \widetilde{C} + s \cdot E$ mit $s = \mathrm{mult}_p(C)$, d.h. in $\mathcal{O}_q$ gilt $f = x^s \cdot \widetilde{f}$. Da per Annahme $e = w(x)$ gilt, folgt $w(f) = s \cdot e + w(\widetilde{f})$ und damit die Behauptung. □

Satz 4.2.5 (Proximitätssatz). *Sei $j > 0$ und angenommen das Zentrum p_{i+j} existiert und ist proximativ zu p_i. Dann gilt:*

$$e_{p_i}(w) \geq e_{p_{i+1}}(w) + \cdots + e_{p_{i+j}}(w).$$

Die Ungleichung ist genau dann strikt, wenn das Zentrum p_{i+j+1} existiert und proximativ zu p_i ist.

Beweis. Wieder sei ohne Einschränkung $i = 0$. Das Zentrum $q = p_1$ existiert, da wir annehmen, dass $j > 0$. Wir wählen die Koordinaten in $p = p_0$ wie eben, sodass $e_p(w) = w(x)$. Ist p_j proximativ zu p, so auch $p_1, \ldots, p_{j-1}$, d.h. alle diese Zentren liegen auf sukzessiven strikten Transformierten des exzeptionellen Divisors $E = E_p$, der nach Voraussetzung in $\mathcal{O}_q$ lokal durch $x = 0$ beschrieben wird. Für alle $i \geq 1$ gilt $\text{mult}_{p_i}(E^{(i)}) = 1$ und aus der Noether-Formel (4.3) folgt damit

$$e_p(w) = w(x) = e_{p_1}(w) + \cdots + e_{p_j}(w) + \delta,$$

mit $\delta \geq 0$, was nur dann strikt ist, wenn p_{j+1} existiert und proximativ zu p ist. □

Bemerkung 4.2.6. Der Proximitätssatz zeigt, dass die Folge $(e_{p_i}(w))_{i\in\mathbb{N}}$ von Multiplizitäten von w in den Zentren p_i monoton fallend in Γ_w ist.

Angenommen p_i ist nicht das letzte Zentrum. Dann gibt es genau dann endlich viele Zentren von w in $\mathcal{P}$, die proximativ zu p_i sind, wenn es ein $j > 0$ und Zentren $p_{i+1}, \ldots, p_{i+j}$ gibt, sodass

$$e_{p_i}(w) = e_{p_{i+1}}(w) + \cdots + e_{p_{i+j}}(w).$$

Es gibt genau dann unendliche viele solcher Zentren, wenn $\mathcal{P}$ eine unendliche Folge ist und für alle $j > 0$ gilt:

$$e_{p_i}(w) > e_{p_{i+1}}(w) + \cdots + e_{p_{i+j}}(w).$$

Insbesondere folgt unmittelbar aus dem Proximitätssatz, dass $e_{p_i}(w) \geq e_{p_{i+1}}(w)$, da p_{i+1} immer proximativ zu p_i ist. Es folgt außerdem, dass genau dann $e_{p_i}(w) = e_{p_{i+1}}(w)$ gilt, wenn p_{i+1} das einzige Zentrum ist, das proximativ zu p_i ist. Das ist entweder der Fall, wenn p_{i+2} glatt ist (und damit nur proximativ zu p_{i+1}) oder knotig und proximativ zu p_{i+1} sowie einem p_k mit $k \leq i - 1$. Dafür muss notwendigerweise $i \geq 1$ gelten und die Zentren $p_{k+1}, \ldots, p_{i+1}$ müssen ebenfalls proximativ zu p_k sein.

Korollar 4.2.7. *Angenommen p_i ist nicht das letzte Zentrum. Es gibt genau dann endlich viele Zentren p_j mit $j \geq i + 1$ von w, die proximativ zu p_i sind, wenn es eine ganze Zahl $h > 0$ gibt, sodass*

$$h \cdot e_{p_{i+1}}(w) < e_{p_i}(w) \leq (h+1) \cdot e_{p_{i+1}}(w).$$

Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} e_{p_{i+1}}(w) &= \ldots = e_{p_{i+h}}(w) \geq e_{p_{i+h+1}}(w) \\ e_{p_i}(w) &= h \cdot e_{p_{i+1}}(w) + e_{p_{i+h+1}}(w) \end{aligned}$$

und die einzigen Zentren, die proximativ zu p_i sind, sind $p_{i+1}, \ldots, p_{i+h+1}$.

Beweis. Angenommen endlich viele Zentren $p_{i+1}, \ldots, p_{i+j}$ sind proximativ zu p_i. Dann gilt:

$$e_{p_i}(w) = e_{p_{i+1}}(w) + \cdots + e_{p_{i+j}}(w).$$

Nun sind zu den Zentren p_{i+k} für $1 \leq k \leq j - 1$ nur die darauffolgenden Zentren proximativ, d.h. es gilt mit vorherigen Überlegungen

$$e_{p_{i+1}}(w) = e_{p_{i+2}}(w) = \cdots = e_{p_{i+j-1}}(w)$$

und $e_{p_{i+j-1}}(w) \geq e_{p_{i+j}}(w)$, was eine Gleichheit ist, wenn p_{i+j+1} glatt ist oder p_{i+j} das letzte Zentrum war. Das zeigt die Hinrichtung ($j = h + 1$) und die Folgerungen.

Für die Rückrichtung nehmen wir an, dass p_{i+1} definiert ist und $h \cdot e_{p_{i+1}}(w) < e_{p_i}(w) \leq (h+1) \cdot e_{p_{i+1}}(w)$. Wir zeigen induktiv, dass die Zentren $p_i, \ldots, p_{i+h+1}$ proximativ zu p_i sind. Angenommen, dies gilt für $p_{i+1}, \ldots, p_{i+k}$ mit $e_{p_{i+1}}(w) = e_{p_{i+2}}(w) =$

$\ldots = e_{p_{i+k-1}}(w)$ für ein $1 \leq k < h+1$. Dann gilt

$$e_{p+i}(w) + \cdots + e_{p_{i+k}}(w) \leq k \cdot e_{p_{i+1}}(w) < e_{p_i}(w),$$

sodass p_{i+k+1} nach dem Proximitätssatz existiert und proximativ zu p_i ist und es folgt ferner $e_{p_{i+k-1}}(w) = e_{p_{i+k}}(w)$. Somit existieren die Zentren $p_{i+1}, \ldots, p_{i+h+1}$ und sind proximativ zu p_i und w besitzt an allen außer dem letzten Zentrum die gleiche Multiplizität. Ein weiteres Zentrum p_{i+h+2}, das proximativ zu p_i ist, würde nun dazu führen, dass $e_{p_{i+1}}(w) = e_{p_{i+h+1}}(w)$ und es würde folgen, dass

$$e_{p_i}(w) \geq (h+1) \cdot e_{p_{i+1}}(w) + e_{p_{i+h+2}}(w) > (h+1) \cdot e_{p_{i+1}}(w),$$

was einen Widerspruch zur Annahme darstellt. Es können also insbesondere nur endlich viele Zentren von w proximativ zu p_i sein. □

Bemerkung 4.2.8. In Korollar 4.2.7 gilt genau dann $e_{p_{i+h}}(w) = e_{p_{i+h+1}}(w)$, wenn p_{i+h+1} das letzte Zentrum von w oder p_{i+h+2} glatt ist.

Wir können nun ebenfalls eine Bedingung dafür formulieren, dass zu einem Zentrum p_i unendlich viele Zentren proximativ sind:

Korollar 4.2.9. *Angenommen p_i ist nicht das letzte Zentrum. Es gibt genau dann unendlich viele Zentren von w, die proximativ zu p_i sind, wenn für alle $n > 0$ gilt:*

$$e_{p_i}(w) > n \cdot e_{p_{i+1}}(w).$$

In einem solchen Fall ist $e_{p+1}(w) = e_{p+n}(w)$ für alle $n > 0$ und alle Zentren p_k mit $k \geq i+1$ sind proximtaiv zu p_i.

Wir übertragen dies auf Divisoren im Ausgangsmodell: Nach Voraussetzung an das Modell, liegt das Zentrum p_0 auf maximal zwei irreduziblen Komponenten D_0 und D_1 der speziellen reduzierten Faser, welche in $\mathcal{O}_{p_0}$ gegeben seien durch $f_0 = 0$ und $f_1 = 0$.[1] Angenommen die Zentren bleiben stets auf den strikten Transformierten von D_0. Dann gilt $e_{p_i}(w) = w(f_1)$ für $i \geq 0$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir

$$w(f_0) \geq \sum_{i=0}^{n} \operatorname{mult}_{p_i}(D_0^{(i)}) e_{p_i}(w) \geq (n+1) \cdot w(f_1) > n \cdot w(f_1).$$

Hier gilt auch die Rückrichtung. Man erkennt insbesondere, dass eine Bewertung, die diese Eigenschaft erfüllt, nach Bemerkung 2.1.17 nicht von Rang 1 sein kann. Das überrascht nicht, denn es handelt sich genau um die bereits beschriebenen Bewertungen von Typ 2v.

Liegen nur endlich viele Zentren auf den strikten Transformierten von D_0, dann gibt es ein $h \in \mathbb{N}$, sodass

$$h \cdot w(f_1) < w(f_0) \leq (h+1) \cdot w(f_1)$$

und

$$w(f_0) = h \cdot w(f_1) + e_{p_h}(w) = h \cdot e_{p_0}(w) + e_{p_h}(w).$$

Insbesondere gilt $e_{p_0}(w) = e_{p_i}(w) \geq e_{p_h}(w)$ für alle $i \leq h-1$. Gilt $w(f_0) = h \cdot w(f_1)$, so liegt das Zentrum p_h im glatten Ort.

[1] Man bemerke, dass ein Zentrum x_w auf einem Modell $\mathscr{X}$ genau dann auf einem vertikalen Divisor D liegt, wenn $w(f) > 0$, wobei $D = V(f)$ in $\mathcal{O}_{\mathscr{X},x_w}$.

Es soll nun ein Divisions-Algorithmus in Γ_w angegeben werden, um die „knotigen“ Bewertungen zu beschreiben. Dazu nehmen wir an, dass $p = p_0$ in $\mathscr{X}$ bereits auf einem Doppelpunkt der speziellen reduzierten Faser liegt, also im Schnitt zweier (vertikaler) Primdivisoren D_0 und D_1.[2] Seien D_0 und D_1 in p_0 wieder lokal beschrieben durch $f_0 = 0$ und $f_1 = 0$ und angenommen $w(f_0) \geq w(f_1)$. Setze $e = e_0 = w(f_0)$ und $e' = e_1 = w(f_1)$.

Divisions-Algorithmus: Wir wählen eine ganze Zahl h maximal mit der Eigenschaft, dass $h \cdot e' \leq e$. Existiert ein solches h nicht, so sagen wir, der Divisions-Algorithmus wird *verhindert* (und folgern, dass alle folgenden Zentren auf der strikten Transformierten von D_0 liegen.)
Existiert ein solches h, setze $h = h_1$ als *Ergebnis der Division* und $e_2 = e - he'$ als *Rest*. Dann gibt es h Zentren $p_0, \dots, p_{h-1}$, in denen w Multiplizität e' besitzt und welche auf D_0 bzw. sukzessiven strikten Transformierten von D_0 liegen. Insbesondere gilt $0 \leq e_2 < e'$.

- Ist $e_2 = 0$, dann existiert das nächste Zentrum p_h nicht (d.h. die Bewertung korrespondiert mit dem entstehenden Divisor) oder liegt im glatten Ort der reduzierten speziellen Faser. In diesem Fall endet der Algorithmus.

- Ist $e_2 \neq 0$, dann existiert das nächste Zentrum p_h und es gilt

  $$p_h \in D_0^{(h)} \quad \text{und} \quad e_{p_h}(w) = e_2.$$

  Das bedeutet insbesondere, dass p_h das letzte Zentrum auf einer sukzessiven strikten Transformierten von D_0 ist.

  Wir wiederholen nun das Vorgehen mit den Multiplizitäten $e = e_1$ und $e' = e_2$, d.h. wir beginnen den Prozess nun im Zentrum p_h, welches auf den Divisoren $D_1^{(h)}$ und $E_{p_{h-1}}$ liegt.[a] Wir erhalten schließlich eine endliche oder unendliche Folge von Divisionen mit Rest

  $$e_{i-1} = h_i e_i + e_{i+1},$$

  zu welchen jeweils h_i Zentren gehören. Im Fall $i = 1$ haben wir diese bereits beschrieben. Ist $i > 1$, so gehören zu der i-ten Division die Zentren

  $$p_{h_1+\cdots+h_{i-1}}, \dots, p_{h_1+\cdots+h_{i-1}+h_i-1},$$

  in denen w Multiplizität e_i besitzt und die alle proximativ zu $p_{h_1+\cdots+h_{i-1}-1}$ sind. Ist $e_{i+1} \neq 0$, existiert ein weiteres Zentrum, das proximativ zu $p_{h_1+\cdots+h_{i-1}-1}$ ist und in dem w Multiplizität e_{i+1} besitzt.

[a] Korollar 4.2.7 suggeriert an dieser Stelle, dass das nächste Zentrum, in dem wir starten, p_{h_1-1} sein sollte, da wir uns für die Anzahl von Zentren interessieren, die proximativ zu diesem Zentrum sind und gleiche Multiplizität haben. Das wäre aber inkonsitent mit der Ausgangssituation: Hier betrachten wir nämlich nicht die zu p_0 proximativen Zentren, sondern die Zentren auf sukzessiven strikten Transformierten einer in dem Modell $\mathscr{X} = \mathscr{X}^{(0)}$ bereits existierenden irreduziblen Komponente D_0 der speziellen Faser. Diese Inkonsistenz kann man vermeiden, indem man Proximität zu einem Divisor analog zu Proximität zu einem Zentrum definiert. Die Startzentren bzw. -divisoren verschieben sich dann entsprechend. Diese Zusammenhänge sind in Abbildung 4.6 dargestellt.

[2] Liegt das Zentrum in $\mathscr{X}$ auf einem einzelnen Divisor (wie in Abbildung 4.3), so blasen wir in den Zentren auf bis ein Zentrum in einem Knoten liegt. Tritt dies nie ein, liegt eine Typ $2\mathrm{u}_{\mathrm{sm}}$ vor.

Wir nehmen nun an, alle Zentren p_i für $i \geq 0$ existieren, d.h. w ist wirklich eine Typ 2-Bewertung. Es ergeben sich drei Möglichkeiten für den Divisions-Algorithmus bei p:

1. Der Algorithmus wird bei $p = p_0$ bzw. $p_{h_1+\cdots+h_{n-1}}$ für ein $n \geq 1$ verhindert. Dies tritt genau dann ein, wenn alle folgenden Zentren auf der strikten Transformierten von D_0 liegen bzw. proximativ zu $p_{h_1+\cdots+h_{n-1}-1}$ sind.
2. Der Algorithmus endet bei $p = p_0$ bzw. $p_{h_1+\cdots+h_{n-1}}$ für ein $n \geq 1$. Dies tritt genau dann ein, wenn $e_{n+2} = 0$ und folglich das Zentrum $p_{h_1+\cdots+\ldots h_n}$ glatt ist. In diesem Fall haben wir eine endliche Folge von Divisionen mit Rest
$$e_{i-1} = h_i e_i + e_{i+1},$$
mit $1 \leq i \leq n+1$, wobei h_i angibt, wie viele (aufeinanderfolgende) Zentren Multiplizität e_i besitzen.
3. Der Algorithmus wird nicht verhindert und bricht nicht ab. Dies tritt genau dann ein, wenn $e_{i-1} > e_i > 0$ für alle $i \geq 1$. In diesem Fall haben wir eine unendliche Folge von Divisionen mit Rest:
$$e_{i-1} = h_i e_i + e_{i+1}.$$
Die Zentren p_i für $i \geq 0$ sind also verteilt in unendlich viele endliche Sequenzen von Zentren gleicher Multiplizität.

Bemerkung 4.2.10. Angenommen wir sind im zweiten oder dritten Fall. Die entstehende Folge der Ergebnisse h_i der Division mit Rest lässt sich auch anders interpretieren:

Im Ausgangsmodell $\mathscr{X}$ liegt das Zentrum p_0 per Annahme auf zwei sich transversal schneidenden vertikalen Primdivisoren D_0 und D_1. Die „Richtungen“ dieser beiden Divisoren bezeichnen wir mit 0 bzw. 1. Liegt das Zentrum p_1 in der ersten Aufblasung dann nicht im glatten Ort, muss es sich für einen Knoten und damit für eine Richtung entscheiden und wir ordnen dem Zentrum entsprechende Richtung als Label zu. Wir nehmen nun an, dass $e_0 = w(f_0) > w(f_1) = e_1$. Das Label von p_1 ist damit 0 und jedes weitere Zentrum, das auf einer strikten Transformierten von D_0 liegt, bekommt ebenfalls dieses Label. Das sind gerade die Zentren $p_1, p_2, \ldots, p_{h_1}$ und damit genau h_1 viele. Im Divisions-Algorithmus nimmt p_{h_1} nun die Rolle von p_0 ein. Dieses Zentrum liegt auf dem Knoten von $D_0^{(h)}$ und dem exzeptionellen Divisor $E_{p_{h_1-1}}$. Der Kurve $D_0^{(h)}$ ordnen wir weiterhin die Richtung 0 und $E_{p_{h_1-1}}$ die Richtung 1 zu. Das Zentrum p_{h_1+1} ist nun entweder glatt oder liegt auf dem Knoten der Divisoren E_{p_h} und $E'_{p_{h-1}}$. Ist Letzteres der Fall, so geben wir diesem Zentrum das Label 1 und genauso allen weiteren Zentren, die auf sukzessiven strikten Transformierten von $E_{p_{h_1-1}}$ liegen. Das sind genau die Zentren $p_{h_1+1}, p_{h_1+2}, \ldots, p_{h_1+h_2}$, also h_2 viele. Man bemerke, dass man hier das Zentrum p_{h_1} nicht mitzählt, obwohl es ebenfalls proximativ ist zu p_{h_1-1} ist. Man wiederholt dieses Vorgehen und erhält eine Folge von Nullen und Einsen, die in Fall 2 endlich und in Fall 3 unendlich ist.

Die Länge der Blöcke von aufeinanderfolgender Nullen bzw. Einsen ergibt genau wieder die (endliche oder unendliche) Folge $(h_i)_{i\geq 1}$ der Ergebnisse der Divisionen mit Rest, siehe auch Abbildung 4.6.

Angenommen wir führen nun den Divisions-Algorithmus bei p mit $e = e_0 \geq e_1 = e'$ durch und es gilt $n \cdot e = m \cdot e'$ für $m, n \in \mathbb{N}$. Dann macht der Divisions-Algorithmus nichts anderes, als den größten gemeinsamen Teiler von m und n zu

Zentren		p_0	$p_1 \cdots \mathbf{p_{h_1-1}}$	p_{h_1}	$p_{h_1+1} \cdots \mathbf{p_{h_1+h_2-1}}$	$p_{h_1+h_2}$	$p_{h_1+h_2+1} \quad \cdots$
Mult.	$\mathbf{e_0}$	e_1	$e_1 \cdots e_1$	e_2	$e_2 \cdots e_2$	e_3	$e_3 \quad \cdots$
Label			$0 \cdots 0$	0	$1 \cdots 1$	1	$0 \quad \cdots$

ABBILDUNG 4.6: Übersicht über die Multiplizitäten und Label der Zentren p_i in den Modellen $\mathscr{X}^{(i)}$ für $i \geq 0$: Gefärbt sind die Startwerte der verschiedenen Durchläufe des Divisions-Algorithmus bei p_0. Fett gedruckt sind die Zentren, zu denen die darauffolgenden $h_i + 1$ Zentren proximativ sind, wobei die Proximitätsbeziehung für $i = 0$ zu einem Divisor $D_0 = V(f_0)$ in $\mathcal{O}_{\mathscr{X},p_0}$ mit $e_0 = w(f_0)$ besteht. Die doppelten vertikalen Striche stehen für einen echten Abfall der Multiplizität von w in dem System der Zentren. Reguläre vertikale Striche für eine Änderung der Richtung im zuvor beschriebenen Sinne.

bestimmen. Bekanntermaßen stellen die Ergebnisse der Ganzzahldivision im Euklidischen Algorithmus mit Eingabe $m \geq n$ die Koeffizienten der Kettenbruchentwicklung des Bruchs m/n dar. Damit ist zu erwarten, dass die Kettenbruchentwicklung der Folge $(h_i)_{i\geq 1}$ das Verhältnis von e' und e angibt, sofern der Algorithmus nicht verhindert wird. Hierzu wiederholen wir zunächst die folgenden Konventionen:

Der *endliche Kettenbruch* $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ mit Teilnennern $a_i \in \mathbb{Z}$ zu $i = 0, 1, \ldots, n$ mit $a_i > 0$ für alle $0 < i \leq n$ ist rekursiv definiert als

$$[a_0] := a_0$$
$$[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] := [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} + \frac{1}{a_n}].$$

Endliche Kettenbrüche sind wohldefiniert: mit $a_{n-1} \geq 0$ und $a_n > 0$ ist $a_{n-1} + \frac{1}{a_n} > 0$ und es gilt

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots \frac{1}{a_n}}}}.$$

Jeder endliche Kettenbruch entspricht also einen rationalen Zahl. Ist $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge ganzer Zahlen mit $a_i \geq 1$ für $i > 0$. Dann existiert der Grenzwert der endlichen Kettenbrüche

$$[a_0, a_1, \ldots] := \lim_{n\to\infty} [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n]$$

und wir nennen diesen Wert *unendlicher Ketterbruch*. Die endlichen Kettenbrüche $[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n]$ bezeichnen wir auch als *n-ten Näherungsbruch*. Jeder unendliche Kettenbruch konvergiert gegen eine Zahl in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Lemma 4.2.11. *(i) Der Divisions-Algorithmus in p endet genau dann, wenn e und e' aufgefasst als Elemente des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\Gamma_w \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ linear abhängig sind.*

Angenommen dies ist der Fall. Seien $h_1, \ldots, h_r$ die Ergebnisse der Divisionen mit Rest und der davon erzeugte endliche Kettenbruch sei gegeben als

$$\frac{m}{n} = [h_1, \ldots, h_r],$$

wobei $ggT(m, n) = 1$. Dann gilt $e = m \cdot e_r$ und $e' = n \cdot e_r$ und damit $e = (m/n) \cdot e'$.

(ii) Angenommen der Divisions-Algorithmus bei p wird nicht verhindert und bricht nicht ab und wir erhalten eine unendliche Folge $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von Ergebnissen der Divisionen.

Dann gilt für alle ungeraden i, dass $\beta_i e' < e < \beta_{i+1} e'$, wobei $\beta_i = [h_1, \ldots, h_i]$ den i-ten Näherungsbruch des unendlichen Kettenbruchs $[h_1, h_2, \ldots]$ bezeichne.

Beweis. (i) Angenommen der Algorithmus endet bei p. Wir führen eine Induktion nach der Anzahl der Divisionen durch. Ist $r = 1$, so gilt $e = h_1 e'$. Sei nun $r > 1$. Schreibe

$$\frac{m}{n} = h_1 + \frac{1}{m'/n'} \quad \text{mit } \mathrm{ggT}(m', n') = 1.$$

Dann gilt $m = h_1 m' + n'$ und $n = m'$. Es folgt $e' = m' e_r$ und $e_2 = n' e_r$ mit der Induktionsvoraussetzung. Also gilt $e = h_1 e' + e_2 = h_1 m' e_r + n' e_r = m e_r$ und damit folgt die Behauptung. Gilt umgekehrt $e = q e'$ für $q = m/n \in \mathbb{Q}$, dann berechnet der Algorithmus $\mathrm{ggT}(m, n)$ (und bricht damit ab).

(ii) Es gilt $h_1 e' < e$. Das zeigt die Behauptung für $i = 1$. Ist $i > 1$, schreibe

$$\beta_i = h_1 + \frac{1}{\beta'_{i-1}}$$

und nehme an, i ist ungerade. Per Induktionsvoraussetzung gilt $e' < \beta'_{i-1} e_2$ und damit $\beta_i e' < e$. Analog gilt für jedes gerade i, dass $e < \beta_i e'$. □

Algebraische Struktur der Bewertungen von Typ 2u

Dies macht es uns möglich, die algebraische Struktur der bereits unterschiedenen unbeschränkten Typ 2-Bewertungen zu beschreiben. Diese besitzen alle Rang 1 und damit lässt sich die Wertegruppe als geordnete Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$ auffassen. Die konkrete ordnungserhaltende Einbettung wird nur für den Typ $2\mathrm{u}_{\mathrm{node}}$ betrachtet. Beginnt man hier in einem hinreichend feinen Modell, bricht der Divisions-Algorithmus nicht ab. Die dazugehörige Null-Eins-Folge beschreibt das Verhalten der Zentren in der Folge von Aufblasungen und die dazu korrespondierende Folge $(h_i)_{i \geq 0}$ macht es möglich, die Geometrie der Modelle in Aussagen über die algebraische Struktur der Wertegruppe zu übersetzen. Sogar noch mehr: Die durch diese Folge gegebene irrationale Zahl legt eine ordnungserhaltende Einbettung der Wertegruppe in die reellen Zahlen fest.

Typ $\mathbf{2u_{node}}$: Eine Bewertung ist von diesem Typ, wenn unendlich viele Zentren in Knoten der speziellen Faser liegen, jedoch jeweils nur endlich viele Zentren auf den strikten Transformierten eines Primdivisors. Wir nehmen nun also an, wir beginnen in einem Modell $\mathscr{X}$ mit Zentrum $p = p_0$ und alle folgenden Zentren p_i mit $i \geq 1$ sind knotig. Bezeichne D_0 und D_1 die beiden vertikalen Primdivisoren, auf denen p liegt und seien diese wie zuvor lokal beschrieben durch $f_0 = 0$ und $f_1 = 0$. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass $e_0 = w(f_0) > e_1 = w(f_1)$, da bei Gleichheit das nächste Zentrum glatt wäre. Der Divisions-Algorithmus bei p bricht nicht ab, liefert eine unendliche Folge von Divisionen

$$e_{i-1} = h_i e_i + e_{i+1}, \quad i \geq 1 \tag{4.4}$$

und es gilt $e_{i-1} > e_i$ und $h_i \geq 1$ für alle $i \geq 1$. Aus der Noether-Formel (4.3) folgt, dass sich die Wertegruppe durch die Multiplizitäten von w in den Zentren $\{p_i\}_{i \geq 0}$ erzeugen lässt und der Divisions-Algorithmus zeigt, dass sich diese Multiplizitäten als $\mathbb{Z}$-Linearkombination von e_0 und e_1 darstellen lassen. Somit gilt $\Gamma_w = \mathbb{Z} e_0 \oplus \mathbb{Z} e_1$.

Wir wählen nun die folgende Einbettung

$$\begin{aligned} \iota: \quad \mathbb{Z}e_0 \oplus \mathbb{Z}e_1 &\hookrightarrow \mathbb{R} \\ (e_0, e_1) &\mapsto (\gamma, 1), \end{aligned}$$

wobei γ gegeben sei als (unendlicher) Kettenbruch der Folge der h_i aus (4.4), d.h. $\gamma = [h_1, h_2, \dots]$. Damit ist die Zahl γ irrational und ferner gilt $\gamma > 1$. Schreibe nun $\gamma = h_1 + \frac{1}{\delta}$, d.h. $\delta = [h_2, h_3, \dots]$. Dann kommutiert das folgende Diagramm,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}e_0 \oplus \mathbb{Z}e_1 \arrow[r, "\iota = (\gamma, 1)"] & \mathbb{R} \arrow[d, "\cdot\delta"] \\ \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2 \arrow[u, "\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -h_1 \end{pmatrix}"] \arrow[r, "\iota_1 = (\delta, 1)"] & \mathbb{R}. \end{tikzcd}$$

denn:

$$e_2 \mapsto e_0 - h_1 e_1 \mapsto \gamma - h_1 \mapsto \delta(\gamma - h_1) = 1.$$

Setzt man nun $\gamma = \delta_1, \delta = \delta_2$ und $\delta_i = [h_i, h_{i+1}, \dots]$ für $i \geq 0$, so kann man leicht nachrechnen, dass für alle $i \geq 1$ das folgende Diagramm ebenfalls kommutiert,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}e_{i-1} \oplus \mathbb{Z}e_i \arrow[r, "\iota_{i-1} = (\delta_i, 1)"] & \mathbb{R} \arrow[d, "\cdot\delta_{i+1}"] \\ \mathbb{Z}e_i \oplus \mathbb{Z}e_{i+1} \arrow[u, "\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -h_i \end{pmatrix}"] \arrow[r, "\iota_i = (\delta_{i+1}, 1)"] & \mathbb{R}. \end{tikzcd}$$

weil gilt:

$$e_{i+1} \mapsto e_{i-1} - h_i e_i \mapsto \delta_i - h_i \mapsto \delta_{i+1}(\delta_i - h_i) = 1.$$

Es bleibt zu zeigen, dass der Gruppenhomomorphismus ι ordnungserhaltend ist, d.h. dass $(\Gamma_w)_{>0} \subseteq \iota^{-1}(\mathbb{R}_+)$. Das folgt jedoch, weil die Noether-Formel bereits zeigt, dass $(\Gamma_w)_{>0} = \langle e_i \mid i = 0, 1, \dots \rangle_{\mathbb{N}}$. Wir können die Wertegruppe folglich identifizieren mit $\mathbb{Z} \oplus \gamma\mathbb{Z}$ und es gilt $\operatorname{rk} \Gamma_w = 1 < \operatorname{rr} \Gamma_w = 2$ und der Restklassenkörper $\kappa(w)$ ist endlich über κ, da der Grad Restklassenerweiterungen $\kappa(x_w)$ in knotigen Zentren konstant bleibt.

Typ $2\mathbf{u_{sm}}$: Eine Bewertung ist von diesem Typ, wenn ihre Zentren ultimativ glatt sind, d.h. fast alle Zentren im glatten Ort der speziellen reduzierten Faser liegen. Zudem nehmen wir an, dass es keinen horizontalen Divisor gibt, auf dem unendlich viele Zentren liegen. In diesem Fall können alle Werte von $f \in \mathcal{O}$ mit der Noether-Formel (4.3) berechnet werden und die Wertegruppe wird von der Multiplizität der Zentren erzeugt. Insbesondere enden alle Divisions-Algorithmen. Seien p und q zwei aufeinanderfolgenden Zentren und angenommen, q liegt im glatten Ort. Ist das nächste Zentrum nicht auf der strikten Transformierten von E_p, d.h. auch im glatten Ort, dann gilt $e_p(w) = e_q(w)$. Ansonsten erhalten wir eine Folge aufeinanderfolgender Zentren, die sich in Knoten befinden, wobei das erste Zentrum auf E_q liegt. Nach vorherigem Lemma gilt $me_q(w) = ne_p(w)$ für positive ganze Zahlen n, m mit $n < m$ und nach dem Divisions-Algorithmus sind alle Multiplizitäten von w an diesen Knoten-Punkten erzeugt von $e_p(w)$ und $e_q(w)$. Wählt man $e_{p_0}(w) = 1$, dann sind alle Multiplizitäten rationale Zahlen und sie werden ab dem letzten Zentrum in einem Knoten konstant. Die Wertegruppe Γ_w wird also von endlich vielen rationalen Zahlen erzeugt: Genauer haben wir einen Erzeuger 1 und ferner einen Erzeuger für jede nicht-leere Folge von aufeinanderfolgenden Zentren in Knoten. Sind diese Erzeuger $a_1/b, \ldots, a_r/b$, dann kann man als Erzeuger $\mathrm{ggT}(a_1, \ldots, a_r)/b$ wählen, sodass Γ_w isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist. Damit gilt in diesem Fall $\mathrm{rk}(\Gamma_w) = \mathrm{rr}(\Gamma_w) = 1$. Man bemerke außerdem, dass der Restklassenkörper einer Typ $2u_{\mathrm{sm}}$-Bewertung algebraisch über κ von unendlichem Grad sein muss: Sonst hätte die Ringerweiterung $\mathfrak{o} \subseteq R_w$ endlichen Restklassengrad $f = [\kappa(w) : \kappa]$ und endlichen Verzweigungsindex $(w(K) : v(k))$. Das impliziert aber, dass K als k-Vektorraum Dimension $\dim_k K = ef$ hat, was ein Widerspruch ist.

Bemerkung 4.2.12 (Typ $2u_{sm}$ und Typ 2h)**.** Wählen wir ultimativ glatte Zentren x_w und der Restklassengrad $[\kappa(x_w) : \kappa]$ bleibt endlich, so haben wir es eigentlich mit einer Typ 2h Bewertung zu tun. Dies ist nicht trivial und der Beweis soll hier ausgelassen werden. Es sei jedoch bemerkt, dass es sich hierbei um die einzige Stelle handelt, an der eingeht, dass $k/\mathbb{Q}_p$ endlich ist.

Typ $2\mathbf{u}_{\mathbf{alt}}$: Eine Bewertung ist von diesem Typ, wenn es unendlich viele Zentren in Knoten gibt, jedoch nur endlich viele aufeinanderfolgende Zentren auf Knoten liegen. In diesem Fall lassen sich auch alle Werte über die Noether-Formel (4.3) berechnen und der Divisions-Algorithmus endet, da nach jedem Zentrum ein Zentrum im glatten Ort existiert. Wie bei Typ $2u_{\mathrm{sm}}$ sehen wir also, dass alle Multiplizitäten (nach passender Wahl für $e_{p_0}(w)$) rationale Zahlen sind, jedoch ist die Wertegruppe in diesem Fall nicht endlich erzeugt. Nehmen wir folgenden Fall an: Sei p ein Zentrum, sodass das darauffolgende Zentrum q im glatten Ort liegt und das nächste Zentrum auf dem Doppelpunkt $E_q \cap E'_p$. Dann gilt $me_p(w) = ne_q(w)$ und $n/m < 1$, also $e_p(w) > e_q(w)$. Da wir annehmen, dass es unendlich viele Teilfolgen aufeinanderfolgender Punkte in Knoten gibt, erhalten wir eine streng absteigende Folge von Multiplizitäten, die nicht stationär wird, und damit kann Γ_w nicht isomorph zu $\mathbb{Z}$ sein, jedoch zu einer Gruppe der Form $\bigcup_n \frac{1}{b_n}\mathbb{Z}$ mit $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. Der Restklassenkörper ist algebraisch über κ.

Typ	Wertegruppe	Rang	Q-Rang	auf k	Restklassenkörper
0	trivial	0	0	trivial	K
1h	$\mathbb{Z}$	1	1	trivial	endlich über k
1v	$\mathbb{Z}$	1	1	v	Funktionenkörper über κ mit Transzendenzgrad 1
2h	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ lex.	2	2	v	endlich über κ
2v	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ lex.	2	2	v	endlich über κ
$2u_{\mathrm{node}}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\gamma \subseteq \mathbb{R}$	1	2	v	endlich über κ
$2u_{\mathrm{sm}}$	$\mathbb{Z}$	1	1	v	unendlich, algebraisch über κ
$2u_{\mathrm{alt}}$	$\bigcup_n \frac{1}{b_n}\mathbb{Z}$ mit $\lim b_n = \infty$	1	1	v	algebraisch über κ

ABBILDUNG 4.7: Übersicht über die algebraische Struktur der $\mathfrak{o}$-Bewertungen von K.

Anhang A

Grundlagen der Algebraischen Geometrie

Es sollen nun einige Fakten und Definitionen aus der Algebraischen Geometrie wiederholt werden, die grundlegend für diese Arbeit sind. Der Abschnitt orientiert sich dabei weitgehend an [Har13] sowie [Mum99] und [EH06].

Im Folgenden bezeichnet X immer einen topologischen Raum und alle Ringe sind kommutative Ringe mit Eins.

A.1 Garben und Schemata

Garben

Das Konzept von Garben stellt eine systematische Möglichkeit dar, lokale Daten auf einem topologischen Raum zu untersuchen und spielt eine wichtige Rolle im Umgang mit Schemata. Wir definieren die Kategorie $\mathfrak{Top}(X)$, dessen Objekte die offenen Teilmengen von X und dessen Morphismen die Inklusionen zwischen diesen sind.

Definition A.1.1 (Prägarbe)**.** Eine *Prägarbe* von abelschen Gruppen auf X ist ein kontravarianter Funktor

$$\mathcal{F} : \mathfrak{Top}(X) \to \mathfrak{Ab}.$$

Ändert man die Zielkategorie zu bspw. Ringen, erhält man die Definition einer Prägarbe von Ringen oder beliebiger anderer Objekte einer Kategorie $\mathcal{C}$.

Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Prägarben auf X. Ein *Morphismus von Prägarben* $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ besteht aus einem Morphismus von abelschen Gruppen $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ für alle offenen Mengen U, sodass für alle $V \subseteq U$ offen das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi(U)"] \arrow[d, "\rho^{\mathcal{F}}_{U,V}"] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho^{\mathcal{G}}_{U,V}"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varphi(V)"] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Die Elemente von $\mathcal{F}(U)$ bezeichnen wir als *Schnitte* von $\mathcal{F}$ über U und das Bild unter der Inklusion $V \hookrightarrow U$ unter $\mathcal{F}$ als $\rho_{U,V} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ und nennen es die Restriktionsabbildung von U nach V. Für $s \in \mathcal{F}$ schreiben wir statt $\rho_{U,V}(s)$ auch $s|_V$.

Eine Prägarbe heißt Garbe, wenn sie durch lokale Daten gegeben ist, d.h:

Definition A.1.2 (Garbe)**.** Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X. Dann nennen wir $\mathcal{F}$ eine *Garbe*, wenn für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ mit offener Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ die folgende Sequenz exakt ist,

$$0 \to \mathcal{F}(U) \to \prod_i \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

wobei der zweite Pfeil durch die Restriktionen ρ_{U,U_i} und der Doppelpfeil durch die Restriktionen $\rho_{U_i,U_i\cap U_j}$ und $\rho_{U_j,U_i\cap U_j}$ gegeben ist.

Eine (Prä-)Garbe lässt sich über ihre Halme beschreiben. Für eine (Prä-)Garbe $\mathcal{F}$ und einen Punkt $p \in X$ wird der *Halm* $\mathcal{F}_p$ von $\mathcal{F}$ an dem Punkt p definiert als der direkte Limes

$$\mathcal{F}_p = \varinjlim_{p\in U} \mathcal{F}(U)$$

der Gruppen $\mathcal{F}(U)$ über alle offenen Umgebungen U von p. Ein Element von $\mathcal{F}_p$ ist also eine Äquivalenzklasse (U, s), wobei U eine offene Umgebung von p und s einen Schnitt von $\mathcal{F}$ über U bezeichne. Wir nennen $s_p = (U, s) \in \mathcal{F}_p$ einen Keim des Halms $\mathcal{F}_p$. Für jedes $x \in U$ gibt es eine Abbildung $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_p$, die einen Schnitt s auf s_p schickt. Ist $\mathcal{F}$ eine Garbe, so ist ein Schnitt s von $\mathcal{F}$ über U eindeutig durch seine Bilder in den Halmen bestimmt.

Ein Morphismus von Garben $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ induziert für jedes $p \in X$ einen Morphismus von Halmen $\varphi_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p$ und φ ist genau dann injektiv/surjektiv/bijektiv, wenn φ_p für alle $p \in X$ die korrespondierende Eigenschaft erfüllt.

Wir interessieren uns hauptsächlich für Garben von Ringen auf topologischen Räumen. Einen topologischen Raum X zusammen mit einer Garbe von Ringen $\mathcal{O}$ nennt man auch *geringten Raum* $(X, \mathcal{O})$. Für die Definition eines Schemas (bzw. zunächst eines affines Schemas) benötigen wir einen etwas präziseren Begriff.

Definition A.1.3 (lokal geringter Raum)**.** Ein *lokal geringter Raum* besteht aus einem topologischen Raum X und einer Garbe von Ringen $\mathcal{O}$ mit der zusätzlichen Bedingung, dass für jedes $x \in X$ der Halm $\mathcal{O}_x$ ein lokaler Ring ist.

Ein *Morphismus von lokalen Ringen* $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ besteht aus einer stetigen Abbildung $f : X \to Y$ und einem Morphismus von Garben $f^\# : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$, welcher für eine offene Teilmenge $V \subseteq Y$ gegeben ist durch $\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$, mit der zusätzlichen Bedingung, dass der induzierte Morphismus von lokalen Ringen $f_x^\# : \mathcal{O}_{Y,f(p)} \to \mathcal{O}_{X,p}$ für jedes $p \in X$ ein lokaler Morphismus ist. Das heißt, es gilt $(f_p^\#)^{-1}(\mathfrak{m}_{X,p}) = \mathfrak{m}_{Y,f(p)}$, wobei $\mathfrak{m}_{X,p}$ und $\mathfrak{m}_{Y,f(p)}$ die korrespondierenden maximalen Ideale bezeichnen.

Einem lokal geringten Raum $(X, \mathcal{O})$ lässt sich in jedem Punkt $p \in X$ ein *Restklassenkörper* $\kappa(p) := \mathcal{O}_p/\mathfrak{m}_p$ zuordnen. Ein Morphismus lokal geringter Räume induziert einen Morphismus der Restklassenkörper. Genauer wird für $q \in f^{-1}(p)$ der Restklassenkörper $\kappa(q)$ ein Erweiterungskörper von $\kappa(p)$.

Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal geringter Raum. Für alle $U \subset X$ bezeichne $\mathcal{S}_X(U) \subset \mathcal{O}_X(U)$ die regulären Schitte von $\mathcal{O}_X$ über U. Die Einschränkung regulärer Schnitte auf kleinere offene Teilmengen ist regulär. Folglich ist $\mathcal{S}_X : U \mapsto \mathcal{S}(U)$ eine Untergarbe von $\mathcal{O}_X$. Ferner ist $\mathcal{S}_X(U)$ eine multiplikative Teilmenge von $\mathcal{O}_X(U)$ für jedes U. Somit können wir die Prägarbe von Ringen

$$U \longmapsto \mathcal{S}(U)^{-1}\mathcal{O}_X(U),$$

betrachten. Die Garbe $\mathcal{K}_X$, die mit dieser Prägarbe assoziiert wird, bezeichnen wir als *Garbe von meromorphen Funktionen auf* X. Einen globalen Schnitt dieser Garbe bezeichnen wir als *meromorphe Funktion auf* X. Da jedes Element von $\mathcal{S}_X(U)$ kein Nullteiler auf $\mathcal{O}_X(U)$ ist, ist der natürliche Morphismus $\mathcal{O}_X \to \mathcal{K}_X$ injektiv.

Affine Schemata

Wir wollen nun den Begriff des Schemas definieren und wiederholen dazu zunächst den Begriff des affinen Schemas. Ein affines Schema $X = \operatorname{Spec}(A)$ ist ein geometrisches Objekt, das wir einem kommutativen Ring A zuordnen und das so konstruiert wird, dass die Beziehung dieser beiden Objekte in gewisser Weise das Verhältnis zwischen affinen Varietäten und Koordinatenringen aus der klassischen algebraischen Geometrie verallgemeinert. Konkret bedeutet dies Folgendes.

Mengentheoretisch definieren wir $\operatorname{Spec}(A)$ zunächst als die Menge aller (echten) Primideale von A. Für $\mathfrak{a} \subseteq A$ definieren wir

$$V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

Es lässt sich leicht nachrechnen, dass für Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ und eine Familie von Idealen $\{\mathfrak{a}_i\}_{i \in I}$ gilt $V(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$ bzw. $V(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i) = \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i)$. Damit bilden die Teilmengen der Form $V(\mathfrak{a})$ die abgeschlossenen Teilmengen einer Topologie auf $\operatorname{Spec}(A)$, genannt *Zariski-Topologie*. Ist $0 \neq f \in A$, so definieren wir die *ausgewählten offenen Mengen* von $\operatorname{Spec}(A)$ assoziiert zu f als

$$D(f) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid f \in \mathfrak{p}\} = \operatorname{Spec}(A) \setminus V((f)) = \operatorname{Spec}(A_f),$$

wobei A_f die Lokalisierung von A an f bezeichne und die letzte Gleichheit daher kommt, dass die Primideale von A_f zu den Primidealen von A korrespondieren, die nicht f enthalten. Genauer bilden Teilmengen dieser Form eine Basis offener Teilmengen in dem Sinne, dass sich jede offene Teilmenge als Vereinigung ausgewählter offener Mengen schreiben lässt:

$$U = \operatorname{Spec}(A) \setminus V(\mathfrak{a}) = \bigcup_{f \in \mathfrak{a}} D(f).$$

Der Raum $\operatorname{Spec} A$ ist quasi kompakt (siehe bspw. [Stacks, Tag 00E8]). Man bemerke jedoch, dass $\operatorname{Spec} A$ fast nie Hausdorffsch ist – die offenen Teilmengen sind schlichtweg zu groß. Der Abschluss eines Punktes $\mathfrak{p}$ ist genau die Menge seiner Primoberideale $V(\mathfrak{p})$. Damit ist ein Punkt genau dann abgeschlossen, wenn er zu einem maximalen Ideal korrespondiert. Ist A ein Integritätsring, so ist (0) ein Primideal, dessen Abschluss der ganze Raum ist. Einen Punkt mit dieser Eigenschaft in einem topologischen Raum X nennt man auch *generischen Punkt*. Die irreduziblen Teilmengen $Z \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ sind alle der Form $V(\mathfrak{p})$ für ein Primideal $\mathfrak{p}$ von A und besitzen den eindeutigen generischen Punkt $\mathfrak{p}$.

Wir betrachten nun die folgende Prägarbe von Ringen auf $X = \operatorname{Spec} A$: Jeder ausgewählten offenen Menge $D(f)$ ordnen wir die Lokalisierung A_f von A an dem Element $f \in A$ zu. Es handelt sich sogar um eine Garbe, die wir als *Garbe der regulären Funktionen* bzw. *Strukturgarbe* bezeichnen und mit $\mathcal{O}$ notieren. Für Details, siehe bspw. [Mum99, §1]. Für den Halm an dem Punkt $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ ergibt sich

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} = \varinjlim_{\mathfrak{p} \in U} \mathcal{O}(U) = \varinjlim_{\mathfrak{p} \in D(f)} \mathcal{O}(D(f)) = \varinjlim_{f \notin \mathfrak{p}} A_f = A_{\mathfrak{p}}.$$

Damit wird $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O})$ zum lokal geringten Raum und wir können nun den Begiff des affinen Schemas definieren.

Definition A.1.4 (affines Schema)**.** Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal geringter Raum. Wir sagen $(X, \mathcal{O}_X)$ ist ein *affines Schema*, wenn es (als lokal geringter Raum) isomorph ist zu $(\mathrm{Spec}\, A, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, A})$ ist für einen Ring A.

Sei nun $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Das Urbild eines Primideals $\mathfrak{p}$ von B ist ebenfalls ein Primideal in A. Es wird also eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Spec}\, \varphi : \mathrm{Spec}\, B &\to \mathrm{Spec}\, A \\ \mathfrak{p} &\mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \end{aligned}$$

induziert. Die Zuordnung $A \mapsto (\mathrm{Spec}\, A, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, A})$, die einem Ringhomomorphismus φ die Abbildung $\mathrm{Spec}\, \varphi$ zuordnet, ist funktoriell und induziert eine pfeilumkehrende Äquivalenz zwischen der Kategorie der Ringe und der Kategorie der affinen Schemata. Für Details, siehe [Har13, Prop. II.2.3].

Beispiel A.1.5.

(i) Sei k ein Körper. Dann ist $\mathrm{Spec}\, k$ nur ein Punkt (0) und die Strukturgarbe ist k auf diesem Punkt.

(ii) Wir definieren die affine Gerade über einem Körper k als $\mathbb{A}^1_k = \mathrm{Spec}\, k[X]$. Der Ring $k[X]$ besitzt zwei Arten von Primidealen: (0) und $(f(X))$ für irreduzible Polynome f. Damit besitzt $\mathrm{Spec}\, k[X]$ für jedes normierte irreduzible Polynom einen abgeschlossenen Punkt sowie einen generischen Punkt (0). Der Halm bei (0) ist der rationale Funktionenkörper $k(X)$.

(iii) Da die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ebenfalls einen Hauptideal bilden, wird $\mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}$ häufig als Gerade visualisiert. Es gibt einen abgeschlossenen Punkt für jede Primzahl, sowie einen generischen Punkt (0). Der Halm bei (p) ist nichts anderes als $\mathbb{Z}_{(p)}$, der Halm am generischen Punkt ist $\mathbb{Q}$. Die Restklassenkörper der lokalen Ringe sind $\mathbb{F}_p$ für jede Primzahl p und $\mathbb{Q}$ für den generischen Punkt.

(iv) Ähnliche Bemerkungen lassen sich über $\mathrm{Spec}\, R$ machen, wenn R ein Dedekindring ist, da in diesem Fall alle Primideale maximal oder das Nullideal sind. Wir können uns wieder eine „Gerade " von abgeschlossenen Punkten mit einem generischen Punkt vorstellen. Ist R ein diskreter Bewertungsring, so besitzt R ein eindeutiges maximales Ideal $\mathfrak{m}$ und $\mathrm{Spec}\, R$ besteht nur aus den beiden Punkten $t_1 = (0)$ und $t_0 = \mathfrak{m}$, wobei (0) ein offener Punkt ist und der lokale Ring an diesem Punkt K ist und $\mathfrak{m}$ ein abgeschlossener Punkt mit lokalem Ring R. Die Inklusionsabbildung $R \to K$ korrespondiert zu dem Morphismus $\mathrm{Spec}\, K \to \mathrm{Spec}\, R$, der den eindeutigen Punkt von $\mathrm{Spec}\, K$ auf den offenen Punkt t_1 schickt.

Schemata und Produkte

Definition A.1.6 (Schema)**.** Ein *Schema* ist ein lokal geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, in dem jeder Punkt eine offene Umgebung U besitzt, sodass der topologische Raum U, zusammen mit der eingeschränkten Strukturgarbe $\mathcal{O}_X|_U$, ein affines Schema ist. Wir schreiben oft nur X für das Schema $(X, \mathcal{O}_X)$.

Ein *Morphismus von Schemata* ist ein Morphismus lokal geringter Räume. Ein Isomorphismus ist ein Morphismus mit zweiseitigen Inversen.

Bemerkung A.1.7 (Y-wertige Punkte)**.** Seien X und Y Schemata. Wir nennen einen Morphismus $f : Y \to X$ auch Y-wertigen Punkt von X und bezeichnen die Menge der Y-wertigen Punkte von X auch als $X(Y)$ bzw. $X(R)$, wenn $Y = \operatorname{Spec} R$ ein affines Schema ist. Im letzteren Fall sprechen wir auch von R-wertigen Punkten von X. Um die Idee von R-wertigen Punkten in die übliche Vorstellung von Punkten einzufügen, betrachten wir den Fall, in dem $R = k$ ein Körper ist und untersuchen

$$X(k) = \operatorname{Hom}(\operatorname{Spec} k, X)$$

für ein Schema X. Wir behaupten, einen Morphismus von $\operatorname{Spec} K$ nach X anzugeben, ist dann nichts anderes als einen Punkt $x \in X$ und eine Inklusion $\kappa(x) \to k$ anzugeben:

Ist ein Morphismus $(\varphi, \varphi^\#) : \operatorname{Spec} K \to X$ gegeben, erhalten wir einen Punkt $x = \varphi((0)) \in X$ und einen lokalen Ringhomomorphismus $\varphi^\#_x : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k,(0)} = k$, also insbesondere eine Abbildung $\kappa(x) \to k$, welche injektiv ist, da $\kappa(x)$ ein Körper ist. Ist andersrum ein $x \in X$ und eine solche Inklusion gegeben, so definieren wir $\phi : \operatorname{Spec} k \to X$ via $0 \mapsto x$ und $\phi^\#(U) : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K}(\phi^{-1}U)$ für jede offene Teilmenge durch $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,x} \to \kappa(x) \hookrightarrow k$, wobei die erste Abbildung die Nullabbildung ist, wenn $x \notin U$ und sonst die Inklusion in den direkten Limes.

Definition A.1.8 (Dimension und Kodimension)**.** Die *Dimension* eines Schemas, bezeichnet mit $\dim X$, ist die Dimension des zugrundeliegenden topologischen Raums. Die *lokale Dimension* von X in einem Punkt $x \in X$ ist die (Krull-)Dimension des lokalen Rings $\mathcal{O}_{X,x}$ von X in x. Es lässt sich zeigen, dass die Dimension von X gerade dem Supremum dieser lokalen Dimensionen entspricht.

Die *Kodimension* einer abgeschlossenen Teilmenge Y von X ist

$$\operatorname{codim}(Y, X) = \inf_{Z \subseteq Y} \operatorname{codim}(Z, X),$$

wobei das Infimum über alle abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen Z von Y genommen wird und $\operatorname{codim}(Z, X)$ in diesem Fall definiert ist als die Länge der echten Ketten irreduzibler abgeschlossener Teilmengen von X, die mit Z beginnen.

Definition A.1.9 (offenes und abgeschlossenes Unterschema)**.** Ein *offenes Unterschema* eines Schemas X ist ein Schema U, dessen topologischer Raum eine offene Teilmenge von X ist und dessen Strukturgarbe $\mathcal{O}_U$ isomorph zur Einschränkung $\mathcal{O}_X|_U$ der Strukturgarbe von X ist. Eine *offene Immersion* ist ein Morphismus $f : X \to Y$, der einen Isomorphismus von X zu einem offenen Unterschema von Y induziert.

Eine *abgeschlossene Immersion* ist ein Morphismus $f : Y \to X$, der einen Homöomorphismus vom unterliegenden topologischen Raum von X zu einer abgeschlossenen Teilmenge des unterliegenden topologischen Raum von Y induziert. Ein *abgeschlossenes Unterschema* eines Schema X ist eine Äquivalenzklasse von abgeschlossenen Immersionen, wobei $f : Y \to X$ und $f : Y' \to X$ äquivalent sind, wenn es einen Isomorphismus $i : Y' \to Y$ gibt, sodass $f' = f \circ i$.

Beispiel A.1.10. Sei $X = \operatorname{Spec} A$ ein affines Schema und $\mathfrak{a}$ ein Ideal von A. Betrachte das affine Schema $Y = \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}$. Der Ringhomomorphismus $A \to A/\mathfrak{a}$ induziert einen Morphismus $f : Y \to X$, die eine abgeschlossene Immersion ist und Y homöomorph auf $V(\mathfrak{a})$ abbildet. Das heißt für alle Ideale $\mathfrak{a} \subseteq A$ erhalten wir eine Struktur abgeschlossener Unterschemata auf den abgeschlossenen Teilmengen $V(\mathfrak{a}) \subseteq X$. Dies lässt sich verallgemeinern, siehe Proposition A.4.4.

Oft ist es sinnvoll, Schemata in einer relativen Situation zu betrachten.

Definition A.1.11 (relatives Schema)**.** Sei S ein Schema. Wir definieren ein *Schema über S* oder auch S-Schema als ein Schema X und einen (fixierten) Morphismus $\pi : X \to S$. Man bezeichnet π auch als *Strukturmorphismus* und S als *Basisschema*. Ist $S = \operatorname{Spec} A$ ein affines Schema, so sprechen wir auch von einem *Schema über A*.

Gegeben S-Schemata X und Y, so ist ein *Morphismus von S-Schemata* ein Morphismus $f : X \to Y$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y \arrow[dl] \\ & S. & \end{tikzcd}$$

Im Fall affiner Schemata war die gesamte geometrische Struktur in einem Ring enthalten. Dies stimmt im Allgemeinen nicht, jedoch gilt:

Proposition A.1.12. *Sei X ein Schema und R ein Ring. Dann gibt es eine natürliche Bijektion*
$$\operatorname{Hom}(X, \operatorname{Spec} R) = \operatorname{Hom}(R, \Gamma(X, \mathcal{O}_X)).$$

Beweis. Siehe [Mum99, §2, Thm. 1]. □

Da es für jedes Schema X einen eindeutigen Morphismus $\mathbb{Z} \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ gibt, gibt es nach der vorherigen Proposition einen eindeutigen Morphismus von Schemata $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, die jedem Punkt $x \in X$ die Charakteristik seines Restklassenkörpers zuordnet, und jedes Schema lässt sich als Schema über $\mathbb{Z}$ auffassen. Wir sagen deshalb auch, $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ ist das finale Objekt in der Kategorie der Schemata.

Wir betrachten nun zwei nützliche Konstruktionen.

Lemma A.1.13 (Verkleben von Schemata)**.** *Sei S ein Schema und $\{X_i\}_i$ eine Familie von Schemata über S. Angenommen es gibt offene Unterschemata X_{ij} von X_i und Isomorphismen von S-Schemata $f_{ij} : X_{ij} \to X_{ji}$, sodass $f_{ii} = \mathrm{id}_{X_i}$, sowie $f_{ij}(X_{ij} \cap X_{ik}) = X_{ji} \cap X_{jk}$ und $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$ auf $X_{ij} \cap X_{ik}$. Dann existiert ein S-Schema X, das eindeutig bis auf Isomorphismus ist, mit offenen Immersionen $g_i : X_i \to X$ mit $g_i = g_k \circ f_{ij}$ auf X_{ij} und $X = \bigcup_i g_i(X_i)$. Dieses Schema nennt man die* Verklebung der X_i entlang f_{ij}.

Es gibt eine sehr wichtige Verallgemeinerung der Idee des Urbilds einer Menge unter einer Abbildung, nämlich den Begriff des *Faserprodukts* von Schemata. Gegeben Morphismen von Schemata $f : X \to S$ und $g : Y \to S$ ist das Faserprodukt ein Schema $X \times_S Y$ zusammen mit Projektionsabbildungen $p_1 : X \times_S Y \to X$ und $p_2 : X \times_S Y \to Y$ im folgenden Diagramm,

$$\begin{tikzcd} X \times_S Y \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & S \end{tikzcd} \tag{A.1}$$

das universell unter allen solchen Diagrammen ist (im Sinne von [Stacks, Tag 001V]).

Satz A.1.14. *Gegeben zwei Morphismen von Schemata $f : X \to S$ und $g : Y \to S$, so existiert das in (A.1) definierte Faserprodukt $X \times_S Y$ und ist eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus.*

Beweis. Die Konstruktion folgt durch Verkleben aus dem affinen Fall. Für diesen ist zu zeigen, dass für $X = \operatorname{Spec} A, Y = \operatorname{Spec} B$ und $S = \operatorname{Spec} R$ das Faserprodukt gegeben ist durch $X \times_S Y = \operatorname{Spec}(A \otimes_R B)$. Das folgt aus der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts von Ringen, der funktoriellen Eigenschaft der Spec-Konstruktion sowie Proposition A.1.12. Für Details, siehe [Stacks, Tag 01JO]. □

Man bemerke, dass, wenn $\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}} := \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$, für alle Ringe R gilt

$$\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\mathbb{Z}} \operatorname{Spec}(R) = \operatorname{Spec} R[x_1, \dots, x_n].$$

Wir bezeichnen dies als den *n-dimensionalen affinen Raum über R* und notieren diesen mit $\mathbb{A}^n_R$.

Eine wichtige Anwendung von Faser-Produkten ist der Begriff der *Basiserweiterung*. Sei S ein festes Schema, genannt Basisschema (man denke z.B. an $\operatorname{Spec} k$ für einen Körper k). Dann ist für jedes Schema X über S und jeden Morphismus $S' \to S$ von Schemata das Schema $X' = X \times_S S'$ ein Schema über S' (und man denke hierbei z.B. an $S' = \operatorname{Spec} k'$ für eine Körpererweiterung k'/k). Wir sagen X' entsteht aus X durch Basiserweiterung $S' \to S$.

Wir wollen anschließend noch den Begriff der *Faser* eines Morphismus $f : X \to Y$ von Schemata einführen. Das ist nichts anderes als ein Basiswechsel mit dem Morphismus $\operatorname{Spec} \kappa(y) \to Y$ für ein $y \in Y$. Der Begriff erlaubt es, einen Morphismus als Familie von Schemata (oder genauer: Unterschemata von X) aufzufassen, die parametrisiert wird durch die Punkte von Y.

Definition A.1.15 (Faser eines Morphismus)**.** Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata, $y \in Y$ ein Punkt und $\kappa(y)$ der Restklassenkörper von y. Dann definieren wir die *Faser von f über dem Punkt y* als das Schema $X_y = X \times_Y \operatorname{Spec} \kappa(y)$ im Diagramm,

$$\begin{array}{ccc} X_y & \xrightarrow{p_1} & X \\ \big\downarrow{\scriptstyle p_2} & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\ \operatorname{Spec}(\kappa(y)) & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

wobei $i : \operatorname{Spec} \kappa(y) \to Y$ den kanonischen Morphismus mit Bild y bezeichne und $i^\# : \mathcal{O}_{Y,y} \to \kappa(y)$ die kanonische Abbildung von $\mathcal{O}_{Y,y}$ in seinen Restklassenkörper.

Die Faser X_y ist ein Schema über $\kappa(y)$ und die Projektion auf die erste Komponente induziert einen Homömorphismus zu der Teilmenge $f^{-1}(y)$ von X, siehe [Har13, Ex. II.3.10]. Ist Y irreduzibel mit generischem Punkt η, so sprechen wir von der *generischen Faser*. Ist Y ein diskreter Bewertungsring und $y = t_0$ der abgeschlossener Punkt, so sprechen wir auch von der *speziellen Faser* von X.

Projektive Schemata

Wir wollen jetzt eine wichtige Klasse von Schemata betrachten, die aus graduierten Ringen konstruiert werden. Sei S ein graduierter Ring und S_+ das sogenannte *irrelevante Ideal* $\bigoplus_{d>0} S_d$.

Wir definieren die Menge $\operatorname{Proj} S$ als die Menge aller homogenen Primideale $\mathfrak{p}$, die nicht S_+ enthalten. Ist $\mathfrak{a}$ ein homogenes Ideal S, definieren wir $V(\mathfrak{a})$ als die Teilmenge $V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}$. Analog zur Konstruktion von affinen Schemata kann man nachrechnen, dass für homogene Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sowie für eine Familie homogener Ideale $\{\mathfrak{a}\}_{i\in I}$ in S gilt $V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$ bzw. $V(\sum \mathfrak{a}_i) = \bigcap V(\mathfrak{a}_i)$. Damit lässt sich auf $\operatorname{Proj} S$ eine Topologie definieren, dessen abgeschlossene Teilmengen der Form $V(\mathfrak{a})$ sind. Wie zuvor setzen wir $D(f) = \operatorname{Proj} S \setminus V((f))$ für ein $f \in S_+$ und erhalten eine Basis der Topologie.

Durch die Beobachtung, dass $D(f) = (\operatorname{Spec} S_f)_0$, d.h. dem Ring der Elemente von Grad 0 der homogenen Lokalisierung von S an f entspricht (welchen wir auch mit $S_{(f)}$ bezeichnen), können wir $\operatorname{Proj} S$ wieder eine Garbe von Ringen zuordnen und sehen unmittelbar, dass dies $\operatorname{Proj} S$ die Struktur eines Schemas gibt. Für Details sei auf [Har13, Prop. II.2.5] verwiesen.

Definition A.1.16 (Projektives Schema)**.** Ein Schema der Form $\operatorname{Proj} S$ für eine endlich erzeugte graduierte R-Algebra S heißt *projektives Schema über R*. Ein *quasi-projektives Unterschema über R* ist ein offenes Unterschema eines projektiven Schemas über R.

Beispiel A.1.17. Sei A ein Ring. Ein wichtiges Beispiel projektiver Schemata bildet der *projektive n-dimensionale Raum* $\mathbb{P}^n_A$, den wir definieren als $\mathbb{P}^n_A := \operatorname{Proj} A[x_0, \ldots, x_n]$. Dieses Schema kommt mit einer natürlichen Überdeckung durch affine Schemata, nämlich

$$D(x_i) = (\operatorname{Spec} A[x_0, \ldots, x_n])_0 = \operatorname{Spec} A\left[\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right] = \mathbb{A}^n_A$$

für $i = 0, \ldots, n$.

Gegeben ein Schema S lässt sich der *projektive Raum über S* definieren als

$$\mathbb{P}^n_S = \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\mathbb{Z}} S.$$

Über die zweite Projektion $\mathbb{P}^n_S \to S$ lässt sich dies als S-Schema auffassen.

Im affinen Fall waren alle relevanten Informationen über das Schema in den globalen Schnitten enthalten. Für projektive Varietäten ist dies nicht der Fall. Ist k ein Körper, so ist $\Gamma(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}) = k$ und allgemeiner gilt für einen graduierten Ring S, dass $\Gamma(\operatorname{Proj} S, \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S}) = S_0$. Man bemerke ferner, dass die Proj-Konstruktion im Gegensatz zu Proposition A.1.12 nicht funktoriell ist: Gegeben einen Morphismus graduierter Ringe $f : S \to T$ und ein homogenes Primideal $\mathfrak{p}$ in T, kann es vorkommen, dass $f^{-1}(\mathfrak{p})$ das irrelevante Ideal S_+ enthält und damit kein Punkt in $\operatorname{Proj} S$ darstellt. Jedoch induziert f eine stetige Abbildung $\operatorname{Spec} f : G(f) = \operatorname{Proj} S \setminus V(\varphi(T_+)) \to \operatorname{Proj} T$. Ist $G(f) = \operatorname{Proj} S$, so erhalten wir einen Morphismus $\operatorname{Proj} S \to \operatorname{Proj} S'$.

Allgemeine Eigenschaften von Schemata

Es soll nun eine Reihe von Definitionen eingeführt werden, die es uns möglich machen werden, präzise über geometrische Aspekte von Schemata zu sprechen. Wir rufen dazu zunächst zwei topologische Begriffe ins Gedächtnis.

Einen topologischen Raum X nennen wir *irreduzibel*, wenn aus der Bedingung $X = X_1 \cup X_2$ für X_i abgeschlossen folgt, dass $X = X_1$ oder $X = X_2$. Die Menge der irreduziblen Unterräume von X besitzt maximale Elemente bezüglich Inklusion. Ein solches maximale Element ist abgeschlossen, da der Abschluss irreduzibler Teilmengen irreduzibel ist. Wir sprechen auch von *irreduziblen Komponenten von X*. Ihre Vereinigung entspricht X, denn für jedes $x \in X$ ist $\{x\}$ irreduzibel und damit in einem solchen maximalen Element enthalten. Ferner nennen wir einen topologischen Raum X *zusammenhängend*, wenn X sich nicht als die disjunkte Vereinigung nicht-leerer offener Mengen schreiben lässt. Teilmengen von X, die maximal mit dieser Eigenschaft sind, nennt man *zusammenhängende Komponenten*.

Definition A.1.18 (Zusammenhängende und irreduzible Schemata)**.** Ein Schema X heißt *zusammenhängend* bzw. *irreduzibel*, wenn der zugrundeliegende topologische Raum zusammenhängend bzw. irreduzibel ist.

Ein Schema X über einem Körper k heißt *geometrisch zusammenhängend* bzw. *geometrisch irreduzibel*, wenn das Faserprodukt $X \times_k \overline{k}$ zusammenhängend bzw. irreduzibel ist, wobei $\overline{k}$ einen algebraischen Abschluss von k bezeichne.

Sei X ein topologischer Raum und $x, y \in X$. Wir sagen, y ist eine *Spezialisierung* von x, wenn $y \in \overline{\{x\}}$. Wir sagen x ist der *generische Punkt* von X, wenn x der eindeutige Punkt von X ist, der zu x spezialisiert.

Proposition A.1.19. *Sei X ein Schema. Dann besitzt jede irreduzible abgeschlossene Teilmenge von X einen eindeutigen generischen Punkt.*

Beweis. Siehe [Mum99, §2, Prop. 2]. □

Definition A.1.20 (Reduziertes Schema)**.** Ein Schema X ist *reduziert*, wenn für jede offene Teilmenge U der Ring $\mathcal{O}_X(U)$ keine nilpotenten Elemente besitzt. Dies ist äquivalent dazu, dass $\mathcal{O}_{X,p}$ für alle $p \in X$ keine nilpotenten Elemente besitzt.

Ist $X = \operatorname{Spec} A$ ein affines Schema und bezeichne $\operatorname{nil}(A)$ das Nilradikal von A. Dann ist X genau dann irreduzibel, wenn $\operatorname{nil}(A)$ ein Primideal in A ist und genau dann reduziert, wenn, wenn $\operatorname{nil}(A) = (0)$.

Während die Eigenschaft, irreduzibel zu sein, unabhängig von der Strukturgarbe zu sein scheint, lässt sich eine hinreichende algebraische Bedingung formulieren:

Proposition A.1.21. *Sei X ein Schema. Dann ist X genau dann reduziert und irreduzibel, wenn für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ der Ring $\mathcal{O}_X(U)$ ein Integritätsbereich ist. In diesem Fall nennen wir X auch ein* integres Schema.

Beweis. Siehe [Har13, Prop.II.3.1]. □

Ein Morphismus von Schemata $f : X \to Y$ heißt *dominant*, wenn das Bild von f eine dichte Teilmenge von Y ist. Sind X und Y integre Schemata, ist dies äquivalent dazu, dass f den generischen Punkt von X auf den generischen Punkt von Y schickt bzw. für alle $x \in X$ und $y = f(x) \in Y$ der lokale Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ injektiv ist.

Definition A.1.22 (Rationale Abbildung)**.** Seien X, Y Schemata und seien $f : U \to Y$ und $g : V \to Y$ Morphismen, die auf dichten offenen Teilmengen von X definiert sind. Wir sagen, f ist äquivalent zu g, wenn $f|_W = g|_W$ für eine dichte offene Teilmenge $W \subseteq U \cap V$. Eine *rationale Abbildung* ist eine Äquivalenzklasse der so definierten Äquivalenzrelation. Eine rationale Abbildung von X nach Y heißt *dominant*, wenn es einen dominanten Morphismus von Schemata $f : U \to Y$ gibt, der die rationale Abbildung repräsentiert. Sind X und Y irreduzibel, nennen wir X und Y *birational*, wenn sie isomorph in der Kategorie irreduzibler Schemata und dominanter rationaler Abbildungen sind.

Spricht man von birationalen Abbildungen von Varietäten (im klassischen Sinne), so meint man die Eigenschaft, dass es einen Isomorphismus offener Teilmengen der beiden Varietäten gibt. Das muss ganz allgemein nicht der Fall sein. Hier ist zunächst die formale Definition.

Definition A.1.23 (birationaler Morphismus)**.** Seien X, Y Schemata. Angenommen X und Y haben endlich viele irreduzible Komponenten. Wir sagen, ein Morphismus $f : X \to Y$ ist *birational*, wenn

(i) f eine Bijektion zwischen der Menge der generischen Punkte von irreduziblen Komponenten von X und Y induziert, sowie

(ii) für jeden generischen Punkt $\eta \in X$ einer irreduziblen Komponente von X der lokale Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_{Y,f(\eta)} \to \mathcal{O}_{X,\eta}$ ein Isomorphismus ist.

Sei X ein integres Schema und η der generische Punkt. Dann ist der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,\eta}$ von X an η ein Körper, den wir als *Funktionenkörper* von X bezeichnen und mit $K(X)$ notieren. Man bemerke, dass für alle affinen offenen Teilmengen $V = \operatorname{Spec} A$ von X die Abbildung $A = \mathcal{O}_X(V) \to \mathcal{O}_{X,x}$ einen Isomorphismus $\operatorname{Quot} A \cong \mathcal{O}_{X,\eta}$ induziert. Sind X und Y integre Schemata, so nennen wir $f : X \to Y$ genau dann birational, wenn die induzierte Abbildung $f_\eta^\# : K(Y) \to K(X)$ ein Isomorphismus ist.

Definition A.1.24 ((lokal) noethersches Schema)**.** Sei X ein Schema. Dann ist X *lokal noethersch*, wenn X durch affine offene Teilmengen $\operatorname{Spec} A_i$ überdeckt werden kann, wobei A_i einen noetherschen Ring bezeichne. Das Schema X heißt *noethersch*, wenn es eine endliche solche Überdeckung gibt.

Noethersch ist eine lokale Eigenschaft. Es ist in der Definition äquivalent zu fordern, dass die Bedingungen durch eine oder alle affinen offenen Überdeckungen erfüllt wird, siehe [Har13, Prop.II.3.2]. Insbesondere ist ein affines Schema $X = \operatorname{Spec} A$ genau dann noethersch, wenn A ein noetherscher Ring ist.

Es gibt zwei Endlichkeitsbedingungen, die eine wichtige Rolle in den meisten nicht-trivialen Resultaten über Schemata spielen. Sie haben ähnliche Namen, aber unterschiedlichen Charakter. Die Eigenschaft eines Morphismus, von endlichem Typ zu sein, ist eine direkte Bedingung, die von den meisten Morphismen, die in geometrischen Kontexten auftreten, erfüllt wird. Auf diese Eigenschaft wird sich beispielsweise berufen, um unendlich-dimensionale Fasern auszuschließen. Endlichkeit eines Morphismus ist hingegen eine sehr strenge Bedingung: sie sagt, dass ein Morphismus eigentlich ist und alle Fasern endlich sind (also sogar null-dimensional).

Definition A.1.25 (Morphismen von endlichen Typ)**.** Ein Morphismus $f : X \to Y$ von Schemata heißt *von endlichem Typ*, wenn eine Überdeckung von Y von affinen offenen Teilmengen $V_i = \operatorname{Spec} B_i$ existiert, sodass für alle i das Urbild $f^{-1}(V_i)$ durch endlich viele offene affine Teilmengen $U_{ij} = \operatorname{Spec} A_{ij}$ überdeckt werden kann, wobei A_{ij} eine endlich erzeugte B_i-Algebra sei. Der Morphismus f ist *endlich*, wenn $f^{-1}(V_i)$ für jedes i affin ist und durch eine endlich erzeugte B_i-Algebra gegeben ist.

Es ist äquivalent zu fordern, dass die Bedingungen durch eine oder alle affinen offenen Überdeckungen erfüllt wird, siehe [Har13, Ex. II.3.1].

Beispiel A.1.26. Offenbar ist für jeden Ring A der affine Raum $\mathbb{A}_A^n$ von endlichem Typ über $\operatorname{Spec} A$ und damit ebenfalls $X = \mathbb{P}_A^n$, da es sich nach Beispiel A.1.17 um eine Vereinigung affiner offener Mengen $U_i = V(x_i)$ handelt, die isomorph sind zu $\operatorname{Spec} A[x_0/x_i, \dots, x_n/x_i]$.

Sind nun X und Y Schemata von endlichem Typ über einem Basisschema S sind und ist $f : X \to Y$ ein S-Morphismus, so ist f genau dann birational, dass es nichtleere offene Teilmenge von X und eine offene Teilmenge $V \subseteq Y$ existiert, sodass f eine Isomorphismus von U nach V induziert.

Definition A.1.27 (Varietäten über k)**.** Sei k ein Körper. Eine *affine Varietät* ist ein affines Schema, das einer endlich erzeugten Algebra über k zugeordnet wird. Eine *algebraische Varietät über k* ist ein Schema X, das von endlichem Typ über k ist, d.h. es ist ein k-Schema, für das eine endliche Überdeckung von affinen Unterschemata X_i existiert, die affine Varietäten über k sind. *Projektive Varietäten über k* sind projektive Schemata über k. Insbesondere handelt es sich bei projektiven Varietäten um Varietäten. *Morphismen von Varietäten über k* sind Morphismen von k-Schemata.

Eine algebraische Varietät über k, dessen irreduzible Komponenten alle von Dimension 1 (bzw. von Dimension 2) sind, heißt *algebraische Kurve* (bzw. *algebraische Fläche*) über k.

Man kann folgende Äquivalenz von Kategorien zeigen (siehe [Stacks, Tag 0BXN]):

$$\left\{\begin{matrix}\text{integre Varietäten über } k,\\ \text{dominante rationale Abbildungen}\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{endlich erzugte Erweitungen von } k,\\ k\text{-Algebrahomomorphismen}\end{matrix}\right\}^{\mathrm{op}}$$

Schränken wir uns auf k-Varietäten der Dimension 1 ein, so besteht die Äquivalenz zu endlich erzeugten Erweiterungen von k vom Transzendenzgrad 1 zusammen mit k-Algebrahomomorphismen. Nun ist jede integre algebraische Kurve birational zu einer glatten projektiven integren Kurve (siehe auch Abschnitt A.4). Genauer gibt es unter allen eindimensionalen integren k-Varietäten mit einem gegebenen Funktionenkörper (von Transzendenzgrad 1) genau eine, die glatt und projektiv ist. Dieses glatte projektive Model ist eindeutig bis auf k-Isomorphismus. Wir haben also folgende Äquivalenz von Kategorien

$$\left\{\begin{matrix}\text{glatte projektive integre Kurven über } k,\\ \text{dominante Morphismen}\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}K/k \text{ mit } \operatorname{trdeg} K/k = 1,\\ k\text{-Algebrahomomorphismen}\end{matrix}\right\}^{\mathrm{op}}.$$

A.2 Bewertungskriterium für Separiertheit und Eigentlichkeit

Es sollen nun zwei Eigenschaften von Schemata, oder eher Morphismen, diskutiert werden, die zu bekannten Eigenschaften allgemeiner topologischer Räume korrespondieren. Separiertheit korrespondiert zu der Hausdorff-Eigenschaft eines topologischen Raumes und Eigentlichkeit korrespondiert zum üblichen Begriff eigentlicher Abbildungen. Die üblichen Definitionen lassen sich jedoch nicht in die abstrakte algebraische Geometrie übersetzen, da die Zariski-Topologie fast nie Hausdorffsch ist und der unterliegende topologische Raum eines Schemas nicht alle Eigenschaften eines Schemas widerspiegelt.

Definition A.2.1 (Separiertheit)**.** Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata. Der *Diagonalmorphismus* ist eine eindeutige Abbildung $\Delta : X \to X \times_Y X$, dessen Komposition mit beiden Projektionen $p_1, p_2 : X \times_Y X \to X$ die Identität auf X ergibt. Wir sagen, der Morphismus f ist *separiert*, wenn die Diagonalabbildung Δ eine abgeschlossene Immersion ist. In diesem Fall sagen wir, X ist separiert über Y. Ein Schema X ist separiert, wenn es separiert über $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ ist.

Beispiel A.2.2. Das typische Beispiel eines nicht-separierten Schemas ist die affine Gerade über einem Körper k mit doppeltem Ursprung. Dieses Schema, das wir mit X bezeichnen, entsteht durch Verkleben zweier Kopien der affinen Gerade $\mathbb{A}^1_k$ entlang der Identität. Für Details der Konstruktion, siehe [EH06, §1.2.4]. Dieses Schema ist nicht separiert über k, denn $X \times_k X$ ist die affine Ebene mit doppelten Achsen und vierfachen Ursprung und $\Delta(X)$ ist die Diagonale mit zwei Ursprüngen. Dieses Bild ist jedoch nicht abgeschlossen, da der Abschluss alle vier Ursprünge enthält.

Morphismen $f : X \to Y$ zwischen affinen Schemata $X = \operatorname{Spec} A$ und $Y = \operatorname{Spec} B$ hingegen sind immer separiert, denn $X \times_Y X = \operatorname{Spec}(A \otimes_B A)$ und der Diagonalmorphismus kommt somit von dem surjektiven Ringhomomorphismus $A \otimes_B A \to A$, weshalb Δ eine abgeschlossene Immersion ist.

Sei $f : X \to Y$ wieder ein beliebiger Morphismus von Schemata. Ist f separiert, so ist der Diagonalmorphismus eine abgeschlossene Immersion und das Bild $\Delta(X)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $X \times_Y X$. Tatsächlich gilt aber auch die Rückrichtung, siehe [Har13, Koro.II.4.2].

Bemerkung A.2.3. In Bemerkung A.1.7 haben wir eine Beschreibung der K-wertigen Punkte eines Schemas X diskutiert. Wir betrachten nun für einen lokalen Ring R die R-wertigen Punkte, das heißt die Morphismen von $T = \operatorname{Spec} R$ nach X. Bezeichne t_1 den generischen Punkt und t_0 den abgeschlossenen Punkt von T. Sei nun ein Morphismus $f : T \to X$ gegeben mit $f(t_0) = x$. Dieser liefert einen lokalen Homomorphismus $f_x^\# : \mathcal{O}_{X,x} \to R = \mathcal{O}_{T,t_0}$. Hat man andersrum einen solchen lokalen Homomorphismus gegeben, so kann man eine affine offene Umgebung $\operatorname{Spec} A$ von x wählen, in der $x = \mathfrak{p}$ für ein Primideal von A ist. Dann erhalten wir einen Ringhomomorphismus $\varphi : A \to R$ mit $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_R) = \mathfrak{p}$, der zu einem Morphismus $f : T \to X$ mit $f(t_0) = x$ korrespondiert. Es gilt also

$$\{\text{Morphismen } f : T \to X, f(t_0) = x\} \leftrightarrow \{\text{Lokale Homomorphismen } g : \mathcal{O}_{X,x} \to R\}.$$

Die Existenz eines lokalen Ringhomomorphismus $g : \mathcal{O}_{X,x} \to R$ bedeutet, dass $\mathcal{O}_{X,x}$ von R dominiert wird. Bewertungsringe maximal bezüglich lokaler Dominanz. Das Bewertungskriterium zeigt nun, dass (unter gewissen Voraussetzungen) ein Morphismus von Schemata $f : X \to Y$ genau dann separiert ist, wenn jeder Bewertungsring höchstens einen lokalen Ring von X dominiert.

Theorem A.2.4 (Bewertungskriterium für Separiertheit)**.** *Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata und X ein noethersches Schema. Dann ist f genau dann separiert, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind. Für jeden Körper K und jeden Bewertungsring R mit Quotientenkörper K sei $U = \operatorname{Spec} K$ und $T = \operatorname{Spec} R$ und $i : U \to T$ der Morphismus, der von der Inklusion $R \subseteq K$ induziert wird. Ist ein Morphismus von T nach Y und ein Morphismus von U nach X gegeben, sodass das folgende Diagramm kommutiert,*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & Y \end{tikzcd} \tag{A.2}$$

so gibt es höchstens einen Morphismus von T nach X, der das gesamte Diagramm kommutieren lässt.

Für den Beweis werden zwei Hilfssätze benötigt.

Lemma A.2.5. *Sei R ein Bewertungsring mit Quotientenkörper K und X ein Schema. Einen Morphismus von $T = \operatorname{Spec} R$ nach X anzugeben ist äquivalent dazu, zwei Punkte x_0, x_1 in X anzugeben, wobei x_0 eine Spezialisierung von x_1 sei (d.h. $x_0 \in \overline{\{x_1\}}$), sowie eine Inklusion*

$\kappa(x_1) \subseteq K$, sodass R den lokalen Ring $\mathcal{O}$ an x_0 des Unterschemas $Z = \overline{\{x_1\}}$ von X (mit reduzierter induzierter Struktur) dominiert.

Beweis. Siehe [Har13, Lemma II.4.4]. □

Um zu zeigen, dass ein Morphismus $f : X \to Y$ separiert ist, reicht es zu zeigen, dass das Bild unter dem Diagonalmorphismus $\Delta(X)$ abgeschlossen in $X \times_Y X$ ist. Da X nach Voraussetzung des Bewertungskriteriums noethersch ist, ist der Diagonalmorphismus quasi-kompakt.[1] Das folgende Lemma liefert eine äquivalente Bedingung für die Abgeschlossenheit von $\Delta(X)$.

Lemma A.2.6. *Sei $f : X \to Y$ ein quasi-kompakter Morphismus von Schemata. Die Teilmenge $f(X)$ von Y ist genau dann abgeschlossen, wenn sie stabil unter Spezialisierung ist.*

Beweis. Siehe [Har13, Lemma II.4.5]. □

Beweis von Theorem A.2.4. Sei f separiert und angenommen, es sei ein Diagramm wie in (A.2) gegeben mit zwei Morphismen $h, h' : T \to X$, sodass das gesamte Diagramm kommutiert. Dann erhalten wir einen Morphismus $h'' : T \to X \times_Y X$. Da die Einschränkungen von h und h' auf $U = \operatorname{Spec} K$ gleich sind, liegt das Bild des generischen Punktes t_1 von T in $\Delta(X)$ und damit aufgrund der Abgeschlossenheit von $\Delta(X)$ ebenfalls das Bild des abgeschlossenen Punktes t_0. Damit schicken die beiden Morphismen h und h' die Punkte t_0 und t_1 auf die gleichen Punkten x_0, x_1 in X. Da die von h bzw. h' induzierten Inklusionen $\kappa(x_1) \subseteq K$ ebenfalls gleich sind, folgt mit Lemma A.2.5, dass h und h' gleich sind.

Man nehme andersrum an, die Bedingungen des Theorems seien erfüllt. Mit Lemma A.2.6 und vorheriger Bemerkung genügt es zu zeigen, dass $\Delta(X)$ stabil unter Spezialisierung ist. Sei $\xi_1 \in \Delta(X)$ ein Punkt und ξ_0 eine Spezialisierung. Sei $K = \kappa(\xi_1)$ und $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\overline{\{\xi_1\}},\xi_0}$. Dann ist $\mathcal{O}$ ein lokaler Ring in K und nach dem Satz von Chevalley 2.3.2 existiert ein Bewertungsring R von K, der $\mathcal{O}$ dominiert. Nach Lemma A.2.5 erhalten wir einen Morphismus $T = \operatorname{Spec} R \to X \times_Y X$, der t_0 und t_1 auf ξ_0 bzw. ξ_1 schickt und nach Komposition mit den beiden Projektionen auf X zwei Morphismen $T \to X$, die den gleichen Morphismus nach Y liefern und dessen Einschränkung auf $U = \operatorname{Spec} K$ wegen $\xi_1 \in \Delta(X)$ übereinstimmt. Damit faktorisiert der Morphismus $T \to X \times_Y X$ über den Diagonalmorphismus Δ und es gilt $\xi_0 \in \Delta(X)$. □

Definition A.2.7 (universell abgeschlossener Morphismus)**.** Wir nennen einen Morphismus $f : X \to Y$ von Schemata *universell abgeschlossen,* wenn f abgeschlossen ist (d.h. Bilder abgeschlossener Teilmengen abgeschlossen sind) und für jede Basiserweiterung $Y' \to Y$ der korrespondierende Morphismus $f' : X' \to Y'$ abgeschlossen ist.

Definition A.2.8 (Eigentlicher Morphismus)**.** Ein Morphismus $f : X \to Y$ von Schemata heißt *eigentlich,* wenn f separiert, von endlichem Typ und universell abgeschlossen ist.

Abgeschlossene Immersionen sind eigentlich (siehe [Har13, Korollar II.4.8]). Davon abgesehen gibt es keine offensichtlichen Beispiele. Wir werden am Ende dieses Abschnitts sehen, dass alle projektiven Morphismen eigentlich sind.

Eine wichtige Konsequenz von Eigentlichkeit ist eine Endlichkeitseigenschaft.

[1] Ein Morphismus $f : X \to Y$ von Schemata ist *quasi-kompakt,* wenn für alle affinen offenen Teilmengen $V \subseteq Y$ das Urbild $f^{-1}(V)$ in X quasi-kompakt ist.

Proposition A.2.9. *Sei X ein Schema und $X \to \operatorname{Spec} A$ eigentlich. Dann ist $\mathcal{O}_X(X)$ ganz über A. Ist X eine eigentliche Varietät über einem Körper k, so ist $\mathcal{O}_X(X)$ ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum. Ist X zudem reduziert und (geometrisch) zusammenhängend, so ist $\mathcal{O}_X(X)$ eine (rein inseparable) endliche Körpererweiterung von k.*

Beweis. Siehe [Liu02, Prop. 3.3.18]. □

Theorem A.2.10 (Bewertungskriterium für Eigentlichkeit)**.** *Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata von endlichem Typ und X noethersch. Dann ist f genau dann eigentlich, wenn für jeden Bewertungsring R und alle Morphismen von T nach Y und von U nach X (mit der Notation aus Thm. A.2.4) in dem kommutativen Diagramm*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & Y \end{tikzcd}$$

genau einen Morphismus von T nach X existiert, der das gesamte Diagramm kommutieren lässt.

Beweis. Sei zunächst f eigentlich. Damit ist f insbesondere separiert und nach Theorem A.2.4 ist der Morphismus $T \to X$ eindeutig sobald die Existenz gezeigt wurde. Dafür nutzen wir die universelle Abgeschlossenheit: betrachte die Basiserweiterung $T \to Y$ und setze $X_T = X \times_Y T$. Aus den beiden gegebenen Morphismen $U \to X$ und $U \to T$ erhalten wir aufgrund der universellen Eigenschaft des Faserprodukts einen Morphismus $U \to X_T$. Sei nun t_1 der generische Punkt von U und ξ_1 das Bild von t_1 in X_T. Wir betrachten die abgeschlossene Teilmenge $Z = \overline{\{\xi_1\}}$ von X_T. Da f universell abgeschlossen ist, ist $f' : X_T \to T$ abgeschlossen und damit $f'(Z)$ eine abgeschlossene Teilmenge von T. Weil ξ_1 unter f' auf den generischen Punkt von T geschickt wird, folgt $f'(Z) = T$. Insbesondere existiert dann ein $\xi_0 \in Z$ mit $f'(\xi_0) = t_0$. Damit erhalten wir einen lokalen Ringhomomorphismus der lokalen Ringe $R = \mathcal{O}_{T,t_0} \to \mathcal{O}_{Z,\xi_0}$, der zum Morphismus f' korrespondiert. Per Konstruktion ist der Funktionenkörper von Z gerade $\kappa(\xi_1)$ und damit in K enthalten. Da R nach Satz 2.3.2 maximal unter den lokalen Teilringen von K bezüglich Dominanz ist, ist R isomorph zu $\mathcal{O}_{Z,\xi_0}$ und dominiert diesen Ring. Mit Lemma A.2.5 erhalten wir also einen Morphismus $X_T \to T$, der t_0, t_1 auf ξ_0, ξ_1 schickt und nach Komposition mit den Projektionen den gewünschten Morphismus $T \to X$ liefert.

Wir nehmen andersrum an, die Bedingungen des Theorems seien erfüllt. Per Voraussetzung ist f von endlichem Typ und nach Theorem A.2.4 ist f separiert. Für den Beweis der universellen Abgeschlossenheit, betrachte einen Morphismus $Y' \to Y$ und bezeichne $f' : X' \to Y'$ den zu f korrespondierenden Morphismus, der durch Basiserweiterung entsteht. Sei Z eine abgeschlossene Teilmenge von X' mit reduzierter induzierter Struktur. Wir müssen zeigen, dass $f'(Z)$ abgeschlossen in Y' ist. Da $f' : Z \to Y'$ quasi-kompakt ist, reicht es zu zeigen, dass $f'(Z)$ stabil unter Spezialisierung ist. Der Beweis funktioniert analog zum Beweis der Abgeschlossenheit von $\Delta(X)$ im Beweis von Theorem A.2.4. Siehe [Har13, Thm. II.4.7] für Details. □

Das Bewertungskriterium macht es nun möglich, die eigentlichen Morphismen folgendermaßen zu charakterisieren: Es sind diejenigen Morphismen $f : X \to Y$ von endlichem Typ, sodass für jedes Y-Schema $\operatorname{Spec} R$, wobei R ein Bewertungsring mit Quotientenkörper K ist, die kanonische Abbildung zwischen den R-wertigen Punkten und den K-wertigen Punkten von X bijektiv ist, d.h. $X(K) \cong X(R)$.

Definition A.2.11 (Projektiver Morphismus)**.** Ein Morphismus $f : X \to Y$ ist *projektiv*, wenn er in eine abgeschlossene Immersion $i : X \to \mathbb{P}^n_Y$ für passendes n gefolgt von der Projektion $\mathbb{P}^n_Y \to Y$ faktorisiert. Ein Morphismus $f : X \to Y$ ist *quasi-projektiv*, wenn er in eine offene Immersion $i : X \to \mathbb{P}^n_Y$ für passendes n gefolgt von der Projektion $\mathbb{P}^n_Y \to Y$ faktorisiert.

Beispiel A.2.12. Sei A ein Ring und S ein graduierter Ring mit $S_0 = A$, der durch S_1 endlich erzeugt ist als A-Algebra. Dann ist die Abbildung $\operatorname{Proj} S \to \operatorname{Spec} A$ ein projektiver Morphismus.

Theorem A.2.13. *Ein projektiver Morphismus noetherscher Schemata ist eigentlich. Ein quasi-projektiver Morphismus noetherscher Schemata ist von endlichem Typ und separiert.*

Beweis. Zeigt man, dass die Eigenschaft eines Morphismus, von endlichem Typ, separiert bzw. universell abgeschlossen zu sein, stabil unter Basiserweiterung ist und abgeschlossene Immersionen eigentlich sind (siehe z.B. [Har13, Ex. II.3.13, Korollar II.4.6 und II.4.8]), so reicht es zu zeigen, dass $X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$ eigentlich über $Y = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ ist. Nach Beispiel A.1.26 ist $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ von endlichem Typ. Es seien ein Bewertungsring R und Morphismen $U \to X$ und $T \to Y$ gegeben. Die Behauptung folgt aus Theorem A.2.10 nach Konstruktion eines eindeutigen Morphismus $T \to X$. Für Details, siehe [Har13, Thm. II.4.9]. □

Bemerkung A.2.14 (Chow's Lemma)**.** Eigentliche Morphismen sind über die folgende Aussage mit projektiven Morphismen verbunden. Sei Y ein noethersches Schema. Für jeden eigentlichen Morphismus $X \to Y$ gibt es ein kommutatives Diagramm,

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & X \arrow[d] \\ & Y \end{tikzcd}$$

in dem f und g projektive Morphismen bezeichnen und $f^{-1}(U) \to U$ ein Isomorphismus für eine überall dichte offene Teilmenge $U \subseteq X$ ist. Das bedeutet, modifizieren wir das Schema X leicht, können wir es projektiv über Y machen, siehe [Stacks, Tag 02O2].

A.3 Einige lokale Eigenschaften von Schemata

Wir wollen nun kurz noch einige lokale Eigenschaten von Schemata diskutieren. Der Abschnitt orientiert sich weitgehend an [Liu02, §4].

Definition A.3.1. Sei X ein Schema. Dann ist X *normal in* $x \in X$, wenn $\mathcal{O}_{X,x}$ normal (d.h. ganz abgeschlossen in seinem Quotientenkörper) ist. Ferner nennen wir X *normal*, wenn X irreduzibel und in allen Punkten normal ist.

Bemerkung A.3.2. Sei X ein normales Schema. Dann ist für jede abgeschlossene irreduzible Teilmenge $\Gamma \subseteq X$ von Kodimension 1 der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,\xi}$ am generischen

Punkt ξ von Γ ein diskreter Bewertungsring. Wir bezeichnen korrespondierende Bewertung auch mit v_Γ. Für ein $f \in K(X)^\times$ lässt sich $v_\Gamma(f)$ auch als Verschwindungsordnung von f entlang Γ interpretieren.

Wir nennen außerdem ein noethersches normales Schema X von Dimension 1 ein *Dedekindschema.* Ist R ein Dedekindring, dann ist $X = \operatorname{Spec} R$ offenbar ein Dedekindschema. In diesem Fall sind die lokalen Ringe diskrete Bewertungsringe. Ein noethersches integres Schema X ist genau dann ein Dedekindschema, wenn $\mathcal{O}_X(U)$ für alle offenen Teilmengen $U \subseteq X$ ein Dedekindring ist. Die lokalen Ringe eines Dedekindschemas X sind diskrete Bewertungsringe (Siehe [Liu02, Prop. 4.1.12]).

Bemerkung A.3.3 (abgeschlossene Punkte)**.** Ist X quasi-kompakt, so ist X genau dann normal, wenn X an allen abgeschlossenen Punkten normal ist. Die eine Richtung ist klar. Nehmen wir umgekehrt an, X sei in allen abgeschlossenen Punkten normal und betrachten einen beliebigen Punkt $x \in X$. Dann gibt es, weil X quasikompakt ist, einen abgeschlossen Punkt $y \in \overline{\{x\}}$. Eine offene affine Umgebung von y enthält auch x und damit ist $\mathcal{O}_{X,x}$ eine Lokalisierung von $\mathcal{O}_{X,y}$ und damit normal.

Wir werden sehen, dass sich diese Idee auch auf andere lokale Eigenschaften von Schemata übertragen lässt.

Definition und Bemerkung A.3.4 (Normalisierung)**.** Sei X ein integres Schema. Ein Morphismus $\pi' : X' \to X$ heißt *Normalisierung*, wenn X' normal ist und jeder dominante Morphismus $f : Y \to X$ aus einem normalen Schema Y eindeutig über π faktorisiert.

Dieser Morphismus existiert und ist eindeutig bis auf Isomorphismus (von X-Schemata). Ferner ist ein Morphismus $f : Y \to X$ genau dann eine Normalisierung, wenn Y normal ist und f birational und integer ist.[2]

Wir kommen zu der „einfachsten" Art von Schemata aus dem Blickwinkel der lokalen Struktur, den regulären Schemata, welche gewisse Ähnlichkeiten zum affinen Raum aufweisen.

Definition A.3.5 (Tangentialraum und reguläre Schemata)**.** Sei X ein Schema und $x \in X$. Dann ist $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 = \mathfrak{m}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \kappa(x)$ auf natürliche Weise ein $\kappa(x)$-Vektorraum, dessen Dual $\left(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2\right)^\vee$ als *(Zariski-)Tangentialraum* bezeichnet und mit T_xX notiert wird. Sei X nun lokal noethersch. Wir sagen $x \in X$ ist ein *regulärer Punkt*, wenn $\mathcal{O}_{X,x}$ ein regulärer Ring ist (und damit $\dim \mathcal{O}_{X,x} = \dim_{\kappa(x)} T_xX$). Sonst nennen wir einen Punkt *singulär*. Das Schema X ist *regulär*, wenn X an allen Punkten regulär ist.

Beispiel A.3.6. Wir wollen einen konkreten Fall untersuchen, in dem der Begriff des Zariski-Tangtialraums im klassischen differentialgeometrischen Sinn verstanden werden kann. Sei $X = \mathbb{A}_k^n = \operatorname{Spec} k[x_1, \ldots, x_n]$ der affine Raum über einem Körper k und $P = (p_1, \ldots, p_n) \in X(k)$ ein k-rationaler Punkt. Sei

$$d_P : k[x_1, \ldots, x_n] \to \operatorname{Hom}(k^n, k)$$

die Abbildung, die definiert ist durch

$$d_P(f) : (a_1, \ldots, a_n) \to \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) a_i.$$

[2] Ein Morphismus $f : Y \to X$ heißt integer, wenn für affine offene Teilmengen $U = \operatorname{Spec} R \subset X$ das Urbild $f^{-1}(U) = \operatorname{Spec} A$ affin und $R \to A$ integer ist, d.h. jedes Element von A erfüllt eine Ganzheitsrelation mit Koeffizienten aus R.

Dann nennen wir die Linearform $d_P(f)$ das *Differential von f in P*. Es handelt sich eine k-lineare Abbildung, für die gilt $d_P(fg) = f(P)d_P(g) + g(P)d_P(f)$. Das maximale Ideal $\mathfrak{m}$, das zu P korrespondiert, ist der Form $(x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n)$. Aus der Taylorentwicklung von $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ in P folgt also unmittelbar, dass die Einschränkung von d_P auf $\mathfrak{m}$ einen Isomorphismus $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \simeq (k^n)^\vee$ liefert. Damit erhalten wir einen kanonischen Isomorphismus $T_P\mathbb{A}^n_k = k^n$.

Analog zu Bemerkung A.3.3 lässt sich zeigen, dass ein noethersches Schema genau dann regulär ist, wenn es regulär an den abgeschlossenen Punkten ist.

Bemerkung A.3.7 (Jacobi-Kriterium)**.** Ist X eine affine Varietät über k, so lässt sich X als Untervarietät von $\mathbb{A}^n_k$ auffassen. Für solche $X = V(I) \subset \mathbb{A}^n_k = \operatorname{Spec} k[x_1, \dots, x_n]$ und einem System von Erzeugern $f_1, \dots, f_r$ lässt sich durch das *Jacobi-Kriterium* die Regularität an einem Punkt $x \in X$ über den Rang der Jacobi-Matrix bestimmen. Genauer: Sei $x \in X$ und $J_x = \big(\partial f_i / \partial x_j(x)\big)$. Dann ist X genau dann regulär in x, wenn $\operatorname{rank} J_x = n - \dim \mathcal{O}_{X,x}$. Nach dem obigen Hinweis genügt, das Kriterium auf abgeschlossene Punkte anzuwenden um die Regularität von X zu überprüfen.

Definition A.3.8 (Flache Morphismen)**.** Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata. Wir sagen f ist *flach im Punkt $x \in X$*, wenn $f^\#_x : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ flach ist (d.h. $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$ ein flacher $\mathcal{O}_{X,x}$-Modul ist[3]). Wir sagen f ist *flach*, wenn f in jedem Punkt flach ist.

Sei $f : X \to Y$ ein flacher Morphismus. Ist Y irreduzibel, so wird Y für jede offene nicht-leere Teilmenge $U \subseteq X$ dominiert, d.h. $f(U)$ liegt dicht in Y. Das hat zur Folge, dass es, wenn Y nur endlich irreduzible Komponenten besitzt und reduziert/irreduzible/integer ist, bereits ausreicht, diese Eigenschaften für X an den generischen Fasern nachzuprüfen. Für flache Morphismen $f : X \to Y$ lokal noetherscher Schemata und $x \in Y, y = f(x)$ gilt ferner

$$\dim \mathcal{O}_{X_y,x} = \dim \mathcal{O}_{X,x} - \dim \mathcal{O}_{Y,y}. \tag{A.3}$$

Flachheit lässt sich an den abgeschlossenen Punkten prüfen: Ist $f : X \to Y$ ein Morphismus von endlichem Typ, so ist f genau dann flach, wenn f für jeden abgeschlossen Punkt $y \in Y$ und jeden abgeschlossenen Punkt $x \in X_y$ flach ist.

Definition A.3.9 (glatte Varietät)**.** Sei X eine Varietät über einem Körper k und sei $\overline{k}$ ein algebraischer Abschluss. Wir sagen, X ist *glatt in $x \in X$*, wenn die Punkte von $X_{\overline{k}} = X \times_k \operatorname{Spec} \overline{k}$, die über x liegen, reguläre Punkte von $X_{\overline{k}}$ sind. Wir sagen, dass X *glatt über k* ist, wenn X glatt an allen Punkten ist (d.h. $X_{\overline{k}}$ regulär ist).

Beispiele glatter Varietäten über k sind $\mathbb{A}^n_k$ und $\mathbb{P}^n_k$. Konkret lässt sich Glattheit einer Varietät durch Anwendung des Jakobi-Kriteriums auf $X_{\overline{k}}$ prüfen, siehe Bemerkung A.3.7. Damit lässt sich (mit einigen nicht-trivialen weiteren Überlegungen) folgern, dass ein glatter Punkt x einer Varietät X über k ebenfalls regulär ist.

Wir wollen nun eine allgemeine Definition geben. Man bemerke, dass diese im Fall von Varietäten über k mit der ersten Definition kompatibel ist, da der Strukturmorphismus $X \to \operatorname{Spec} k$ flach ist.

Definition A.3.10 (glatte Morphismen)**.** Sei Y ein lokal noethersches Schema und sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von endlichem Typ. Wir sagen, f ist *glatt am Punkt*

[3]Ein flacher R-Modul ist ein R-Modul N, sodass $- \otimes_R N$ exakt ist. Ist R ein Hauptidealring, so ist ein R-Modul genau dann flach, wenn M torsionsfrei ist.

$x \in X$, wenn f flach an x und $X_y \to \operatorname{Spec} \kappa(y)$ mit $y = f(x)$ glatt ist. Wir sagen, f ist *glatt*, wenn f an jedem Punkt $x \in X$ glatt ist. Es genügt, Glattheit an abgeschlossenen Punkten der Faser X_y über abgeschlossenen Punkten $y \in Y$ zu prüfen.

Im Fall von Varietäten ließ sich Glattheit mit Hilfe des Jacobi-Kriterium untersuchen. Glatte Morphismen lassen sich beispielsweise mit Hilfe der Garbe der Differentiale studieren, siehe hierzu [Liu02, §6.2].

Definition A.3.11 (quasi-endlicher Morphismus)**.** Ein Morphismus $f : X \to Y$ von Schemata hat *endliche Fasern*, wenn für alle $y \in Y$ die Faser $X_y = f^{-1}(y)$ endlich ist. Wir sagen, f ist *quasi-endlich*, wenn ferner für jedes $x \in X_y$ gilt, dass $\mathcal{O}_{X_y,x}$ endlich über $\kappa(y)$ ist. Insbesondere sind Morphismen von endlichem Typ mit endlichen Fasern quasi-endlich.

Theorem A.3.12 (Zarikis Main Theorem)**.** *Sei Y ein normales, lokal noethersches, integres Schema und $f : X \to Y$ ein separierter birationaler Morphismus von endlichem Typ. Ist f quasi-endlich, dann ist f eine offene Immersion.*

Beweis. Siehe [Liu02, §4.4]. □

Korollar A.3.13. *Sei Y ein lokal noethersches Schema und $f : X \to Y$ ein quasi-endlicher projektiver Morphismus. Dann ist f ein endlicher Morphismus.*

A.4 Aufblasung von Schemata

Der Begriff der *Aufblasung* (Engl.: *blow-up* oder *blowing-up*) fundamental für das Studium birationaler Morphismen von Schemata. Wir werden Aufblasungen als Morphismen definieren, die von einer graduierten Garbe von Algebren kommen. Dazu wird kurz der Begriff quasi-kohärenter Modulgarbe eines Schemas wiederholt und eine globale Proj-Konstruktion beschrieben, die eine Analogie zur Proj-Konstruktion darstellt, welche genutzt wurde, um projektive Schemata zu definieren. Wir werden sehen, dass die so definierte Aublasung eine universelle Eigenschaft erfüllt. Schließlich betrachten wir Aufblasungen regulärer Schemata entlang abgeschlossener regulärer Unterschemata. Wir schließen den Abschnitt mit der Frage nach der Existenz einer Auflösung der Singularitäten eines Schemas und einer kurzen Darstellung der bisherigen Resultate zu dieser Fragestellung.

Dieser Abschnitt orientiert sich weitgehend an [Liu02, §8] und [EH06, S. IV.2].

$\mathcal{O}_X$-Moduln

Definition A.4.1 ($\mathcal{O}_X$-Moduln)**.** Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum. Eine *Garbe von $\mathcal{O}_X$-Moduln* oder ein *$\mathcal{O}_X$-Modul* ist eine Garbe $\mathcal{F}$ auf X sodass $\mathcal{F}(U)$ ein $\mathcal{O}_X(U)$-Modul für jede offene Teilmenge U von X ist und wenn für jedes $a \in \mathcal{O}_X(U)$ und $f \in \mathcal{F}(U)$, sowie $V \subseteq U$ gilt $(af)|_V = a|_V f|_V$. Wir definieren den Begriff des $\mathcal{O}_X$-Modul-Homomorphismus in der offensichtlichen Weise.

Definition A.4.2 ((Quasi-)kohärente Garbe)**.** Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum und $\mathcal{F}$ eine Garbe von $\mathcal{O}_X$-Moduln. Dann ist $\mathcal{F}$ *quasi-kohärent*, wenn für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung U von x und eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X$-Moduln

$$\mathcal{O}_X^{(J)}|_U \to \mathcal{O}_X^{(I)}|_U \to \mathcal{F}|_U \to 0$$

existiert. Wir sagen, $\mathcal{F}$ ist *endlich erzeugt*, wenn für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung U von x, ein $n \geq 1$ und ein surjektiver Homomorphismus $\mathcal{O}_X^n|_U \to \mathcal{F}|_U$

existiert. Wir nennen $\mathcal{F}$ *kohärent*, wenn für jede offene Teilmenge U und jeden Homomorphismus $\alpha : \mathcal{O}_X^n|_U \to \mathcal{F}|_U$ der Kern von α endlich erzeugt ist.

Die quasi-kohärenten Garben auf einem affinen Schema $X = \operatorname{Spec} A$ lassen sich folgendermaßen klassifizieren: Für ein A-Modul M definiert man ein $\mathcal{O}_X$-Modul $\widetilde{M}$ so, dass für ausgewählte offene Mengen $D(f)$ von X gilt $\widetilde{M}(D(f)) = M_f$. Es lässt sich verifizieren, dass dies tatsächlich eine Garbe auf X definiert, für die gilt $\widetilde{M}(X) = M$ und $\widetilde{M}_\mathfrak{p} = M_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. Ferner handelt es sich um ein quasi-kohärentes $\mathcal{O}_X$-Modul (siehe [Liu02, Prop. 5.1.5] für Details). Es lässt sich schließlich zeigen, dass quasi-kohärente Garben auf einem Schema X genau diejenigen $\mathcal{O}_X$-Moduln sind, die diese Form haben:

Satz A.4.3. *Sei X ein Schema und $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann ist $\mathcal{F}$ genau dann quasi-kohärent, wenn für jede affine offene Teilmenge U gilt $\mathcal{F}(U)^\sim \simeq \mathcal{F}|_U$. Ferner ist $\mathcal{F}$ kohärent, wenn $\mathcal{F}(U)$ endlich erzeugt über $\mathcal{O}_X(U)$ ist.*

Beweis. Siehe [Liu02, Thm. 5.1.7 und Prop. 5.1.11]. □

Sei X ein Schema. Ein $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{I}$ nennen wir *Idealgarbe*, wenn $\mathcal{I}$ eine Untergarbe von $\mathcal{O}_X$ ist (d.h. $\mathcal{I}(U)$ für alle offenen Teilmengen U von X ein Ideal von $\mathcal{O}_X$ ist). Kohärente Idealgarben auf X erlauben es uns, die abgeschlossenen Unterschemata von X zu klassifizieren:

Proposition A.4.4. *Sei X ein Schema und $i : Y \to X$ ein abgeschlossenes Unterschema, wobei i die kanonische abgeschlossene Immersion bezeichne. Dann ist $\mathcal{I}_Y = \ker i^\#$ eine quasi-kohärente Idealgarbe und die Korrespondenz $Y \mapsto \mathcal{I}_Y$ beschreibt eine Bijektion zwischen den abgeschlossenen Unterschemata von X und den quasi-kohärenten Idealgarben auf X. Man bezeichnet das einer quasi-kohärenten Idealgarbe $\mathcal{I}$ zugeordnete abgeschlossene Unterschema auch mit $V(\mathcal{I})$.*

Beweis. Siehe [Liu02, Prop. 5.1.15]. □

Sei nun $S = \bigoplus_{d\geq 0} S_d$ ein graduierter Ring und $M = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} M_d$ ein graduiertes S-Modul. In folgender Weise konstruiert man eine quasi-kohärente Garbe auf $X = \operatorname{Proj} S$: Für ein nicht-nilpotentes $f \in S_+$ bezeichne $M_{(f)}$ die Elemente in M_f von Grad 0. Es handelt sich auf natürliche Weise um ein $S_{(f)}$-Modul. Nun existiert eine eindeutige $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\widetilde{M}$ auf X, sodass für alle nicht-nilpotenten $f \in S_+$ gilt, dass $\widetilde{M}|_{D(f)}$ die quasi-kohärente Garbe $\left(M_{(f)}\right)^\sim$ auf $D(f) = \operatorname{Spec} S_{(f)}$ ist und für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S$ gilt $\widetilde{M}_\mathfrak{p} \simeq M_{(\mathfrak{p})}$. Für Details, siehe [Liu02, Prop. 5.1.17]. Ist S eine graduierte A-Algebra definieren wir ferner $\mathcal{O}_X(n)$ als das $\mathcal{O}_X$-Modul $S(n)^\sim$, wobei $S(n)$ eine graduierte A-Algebra bezeichne, die gegeben ist durch $S(n)_d = S_{d+n}$. Für ein Schema Y definieren wir diese Garbe als Pull-Back

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_Y}(n) = f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_\mathbb{Z}}(n),$$

wobei $f : \mathbb{P}^d_Y \to \mathbb{P}^d_\mathbb{Z}$ den kanonischen Morphismus bezeichne. Für ein Schema $X \to \operatorname{Spec} A$ und eine Immersion (d.h. eine offene Immersion gefolgt von einer abgeschlossenen Immersion) $i : X \to \mathbb{P}^d_A$ setzen wir $\mathcal{O}_X(n) = i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_A}(n)$.

Definition A.4.5 (invertierbare Garben)**.** Sei X ein Schema. Wir sagen ein $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{L}$ ist *invertierbar*, wenn es für jeden Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U von x und einen Isomorphismus von $\mathcal{O}_U$-Moduln $\mathcal{O}_X|_U \simeq \mathcal{L}|_U$ gibt. Ist X lokal noethersch, heißt dies nichts anderes als zu fordern, dass $\mathcal{L}$ kohärent ist und $\mathcal{L}_x$ frei von Rang 1 über $\mathcal{O}_{X,x}$ für alle $x \in X$ ist.

Beispiel A.4.6. Die Garben $\mathcal{O}_X(n)$ auf $X = \mathbb{P}^n_A$ sind invertierbar.

Aufblasung affiner Schemata

Wir werden die Aufblasung eines (noetherschen) Schemas mit Hilfe einer globalen Proj-Konstruktion realisieren. Wir beginnen zunächst mit der lokalen Betrachtung. Sei dazu A ein noetherscher Ring und I ein Ideal von A. Dann ist

$$\widetilde{A} = \bigoplus_{d \geq 0} I^d, \quad I^0 = A$$

eine graduierte A-Algebra. Seien $f_1, \dots, f_n$ Erzeuger von I, welche wir, aufgefasst als Elemente von Grad 1 in $\widetilde{A}$, mit t_i bezeichnen. Es gibt einen surjektiven Homomorphismus graduierter Algebren

$$\begin{aligned} \phi : A[T_1, \dots, T_n] &\to \widetilde{A} \\ T_i &\mapsto t_i \end{aligned} \tag{A.4}$$

und damit ist $\widetilde{A}$ eine homogene A-Algebra und nach Proposition A.1.12 ist $\operatorname{Proj} \widetilde{A}$ ein projektives Schema über $\operatorname{Spec} A$, das sich via ϕ als abgeschlossenes Unterschema von $\mathbb{P}_A^{n-1}$ auffassen lässt. Wir definieren damit die Aufblasung im affinen Fall.

Definition A.4.7 (Aufblasungen von affinen Schemata)**.** Sei $X = \operatorname{Spec} A$ ein affines noethersches Schema und I ein Ideal von A. Dann nennen wir $\widetilde{X} = \operatorname{Proj} \widetilde{A}$ zusammen mit dem kanonischen Morphismus $\pi : \widetilde{X} \to X$ die *Ausblasung* von X mit Zentrum $V(I)$ (bzw. I).

Ist I von einem regulären Element erzeugt, so gilt $\widetilde{A} \cong A[T]$ und damit ist π ein Isomorphismus. Es gilt genau dann $\operatorname{Proj} \widetilde{A} = \emptyset$, wenn I nilpotente Elemente enthält (denn in diesem Fall ist $V(0) \subseteq V(\widetilde{A})$). Für interessante Beispiele müssen wir also Aufblasungen in von mindestens zwei Elementen erzeugten Idealen betrachten, die keine Nilpotente erhalten.

Beispiel A.4.8 (Aufblasung von $\mathbb{A}_k^2$ im Ursprung)**.** Sei k ein Körper und $X = \mathbb{A}_k^2 = \operatorname{Spec} A$ mit $A = k[x_1, x_2]$. Der Ursprung $P \in \mathbb{A}_k^2$ korrespondiert zu dem Ideal $I = (x_1, x_2)$. Dann ist $\widetilde{X} = \operatorname{Proj} \bigoplus_{d \geq 0} I^d$ die Aufblasung von X entlang I. Die Abbildung ϕ aus (A.4) sorgt dafür, dass $\widetilde{X}$ isomorph zu einem abgeschlossenen Unterschema von $\operatorname{Proj} A[T_1, T_1] = \mathbb{P}_A^1$ ist, das von den homogenen Polynomen in T_1 und T_2 erzeugt wird, die den Kern von ϕ erzeugen. Damit ergibt sich

$$\widetilde{X} = \operatorname{Proj} k[x_1, x_2][T_1, T_1]/(x_1 T_2 - x_2 T_1). \tag{A.5}$$

Wir betrachten die beiden Mengen $U_1 = \operatorname{Spec} k[x_1, x_2/x_1]$ und $U_2 = \operatorname{Spec} k[x_2, x_1/x_2]$, dessen korrespondierende Ringe als Unteralgebren von $k(x_1, x_2)$ aufgefasst werden können. Für diese gilt $(k[x_1, x_2/x_1])_{x_2} = (k[x_2, x_1/x_2])_{x_1}$ und damit lassen sich die offenen Teilmengen $(U_1)_{x_2}$ und $(U_2)_{x_1}$ identifizieren und

$$\widetilde{X} = \operatorname{Spec} k\left[x_1, \frac{x_2}{x_1}\right] \bigcup_{(U_1)_{x_2} \cong (U_2)_{x_1}} \operatorname{Spec} k\left[x_2, \frac{x_1}{x_2}\right].$$

Das Ideal I ist in diesen Karten jeweils von regulären Element erzeugt, also invertierbar. Man sieht wegen (A.5), dass das Urbild $\widetilde{X}_P = \pi^{-1}(P)$ isomorph zu $\operatorname{Proj} k[T_1, T_2] = \mathbb{P}_k^1$ ist und π überall sonst ein Isomorphismus ist. Insbesondere liegt das Urbild von $U = \mathbb{A}_k^2 \setminus \{P\}$ unter π dicht in $\widetilde{X}$ und

$$\widetilde{X}(k) = \{(x_1, x_2, t_1, t_2) \in k^2 \times \mathbb{P}_k^1(k) \mid x_1 t_2 = x_2 t_1\}.$$

Man sollte sich das geometrische Bild aber nicht als $\mathbb{A}_k^2$, an dessen Ursprung $\mathbb{P}_k^1$ angeklebt wurde, vorstellen. Das stimmt schon deshalb nicht, weil dieser Raum nicht irreduzibel wäre, $\widetilde{X}$ jedoch irreduzibel ist. Die bessere Anschauung ist es, dass wir den Ursprung durch den projektifizierten Tangentialraum in diesem Punkt (siehe auch Beispiel A.3.6) ersetzen. Diese Anschauung erhält man, wenn man die Aufblasung $\widetilde{L}$ von Ursprungsgraden L im Ursprung betrachtet. Wir werden sehen, dass diese sich als abgeschlossene Unterschema von $\widetilde{X}$ auffassen lassen. Für $(x,t) \in \widetilde{L}(k) \subset L \times \mathbb{P}_k^1(k)$ entspricht $t = (t_1 : t_2)$ genau dem projektiven Punkt, der zu $L(k)$ korrespondiert und genau in diesem Punkt schneidet $\widetilde{L}(k)$ also $\pi^{-1}(P)$.

Die Beobachtungen lassen sich folgendermaßen verallgemeinern.

Lemma A.4.9. *Sei $\pi : \widetilde{X} \to X = \operatorname{Spec} A$ die Aufblasung eines noetherschen, integeren, affinen Schemas entlang eines abgeschlossenen Unterschemas $V(I)$. Schreibe $I = (f_1, \ldots, f_n)$ mit $f_i \neq 0$ für alle i. Sei ϕ der Morphismus aus (A.4). Dann gilt:*

(i) Für $J = (f_iT_j - f_jT_i)_{1\leq i,j\leq n}$ gilt $J \subseteq \ker\phi$. Nehmen wir ferner an, die f_i bilden ein minimales Erzeugendensystem und das abgeschlossene Unterschema $Z = V(J)$ von $\mathbb{P}_A^{n-1}$ ist integer, so ist die abgeschlossene Immersion $\widetilde{X} \to Z$ ein Isomorphismus.

(ii) Die Aufblasung $\widetilde{X}$ ist die Vereinigung von affinen offenen Unterschemata $\operatorname{Spec} A_i$ für $1 \leq i \leq n$, wobei A_i eine A-Unteralgebra von $\operatorname{Quot} A$ ist, die von $f_jf_i^{-1} \in \operatorname{Quot} A$ erzeugt wird, d.h.

$$\widetilde{X} = \bigcup_i \operatorname{Spec} A\left[\frac{f_1}{f_i}, \ldots, \frac{f_n}{f_i}\right],$$

wobei wir $(\operatorname{Spec} A_i)_{f_i/f_j}$ und $\left(\operatorname{Spec} A_j\right)_{f_j/f_i}$ identifizieren können.

(iii) Wir haben außerhalb des Zentrums der Aufblasung einen Isomorphismus

$$\widetilde{X} \setminus \pi^{-1}(V(I)) \to X \setminus V(I) = \bigcup_i \operatorname{Spec} A_{f_i}.$$

Durch diese lokale Beschreibung der Aufblasung $\widetilde{X}$ von $X = \operatorname{Spec} A$ in dem Ideal I von A lässt sich ferner feststellen, dass das Ideal $\widetilde{I} = \pi^{-1}I\mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ invertierbar ist (denn $IA_i = \langle f_i \rangle$ und f_i ist kein Nullteiler in A_i), bzw. sich das Urbild von $V(I)$ unter π lokal durch ein reguläres Element beschreiben lässt. Wir werden später allgemeiner zeigen, dass die Aufblasung eines Schemas entlang eines Unterschema bzw. einer Idealgarbe universell bezüglich dieser Eigenschaft ist.

Globaler Proj und Aufblasung

Definition A.4.10 (graduierte $\mathcal{O}_X$-Algebren)**.** Eine *graduierte $\mathcal{O}_X$-Algebra $\mathcal{B}$* ist eine quasi-kohärente Garbe von $\mathcal{O}_X$-Algebren mit Graduierung $\mathcal{B} = \bigoplus_{d\geq 0}\mathcal{B}_d$ (mit $\mathcal{B}_d\mathcal{B}_e \subseteq \mathcal{B}_{d+e}$ und $\mathcal{B}_0 = \mathcal{O}_X$), wobei $\mathcal{B}_d$ quasi-kohärente $\mathcal{O}_X$-Untermodul-Garben seien. Das heißt für $U \subseteq X$ affin und offen ist $\mathcal{B}(U)$ eine graduierte $\mathcal{O}_X(U)$-Algebra mit $\mathcal{B}(U)_0 = \mathcal{O}_X(U)$. Wir sagen $\mathcal{B}$ ist eine *homogene $\mathcal{O}_X$-Algebra*, wenn ferner $\mathcal{B}_1$ endlich erzeugt sei und $(\mathcal{B}_1)^n = \mathcal{B}_n$ für alle $n \geq 1$ gelte. Für $U \subseteq X$ affin und offen ist dann $\mathcal{B}(U)$ eine homogene $\mathcal{O}_X(U)$-Algebra.

Beispiel A.4.11. Sei X ein Schema und $\mathcal{I}$ eine endlich erzeugte quasi-kohärente Idealgarbe auf X und $\widetilde{\mathcal{I}} = \bigoplus_{d\geq 0}\mathcal{I}^d$. Dann existiert eine Surjektion

$$\operatorname{Sym}\left(\mathcal{O}_X^{\otimes n+1}\right) \to \bigoplus_{d\geq 0}\mathcal{I}^d$$

und $\widetilde{\mathcal{I}}$ ist eine homogene $\mathcal{O}_X$-Algebra.

Sei nun wieder X ein Schema und $\mathcal{B}$ eine graduierte $\mathcal{O}_X$-Algebra. Für jede affine Teilmenge $U = \operatorname{Spec} A$ von X sei $\mathcal{B}(U)$ die graduierte A-Algebra $\Gamma(U, \mathcal{B}|_U)$. Wir betrachten $\operatorname{Proj} \mathcal{B}(U)$ und dessen natürlichen Morphismus $\pi_U : \operatorname{Proj} \mathcal{B}(U) \to U$. Ist $f \in A$ und $U_f = \operatorname{Spec} A_f$, dann gilt $\operatorname{Proj} \mathcal{B}(U_f) \cong \pi_U^{-1}(U_f)$, weil $\mathcal{B}$ quasi-kohärent ist. Damit folgt schließlich, dass für affine offene Teilmengen U, V von X die Urbilder $\pi_U^{-1}(U \cap V)$ und $\pi_V^{-1}(U \cap V)$ isomorph sind. Diese Isomorphismen erlauben uns es, die Schemata $\operatorname{Proj} \mathcal{B}(U)$ zu verkleben und wir erhalten ein Schema, das wir mit $\underline{\operatorname{Proj}}_X \mathcal{B}$ bezeichnen, zusammen mit dem Morphismus $\pi : \underline{\operatorname{Proj}}_X \mathcal{B} \to X$. Die invertierbaren Garben $\mathcal{O}(1)$ auf jedem $\operatorname{Proj} \mathcal{B}(U)$ sind kompatibel unter dieser Konstruktion und sie verkleben zu einer invertierbaren Garbe $\mathcal{O}(1)$ auf $\underline{\operatorname{Proj}}_X \mathcal{B}$.

Beispiel A.4.12. Sei X ein Schema. Dann lässt sich der projektive n-dimensionaler Raum über X als globaler Proj der symmetrischen Algebra der freien Garbe von Rang $n+1$ auf X realisieren:

$$\mathbb{P}_X^n = \underline{\operatorname{Proj}}_X \left(\mathcal{O}_X[T_0, \ldots, T_n]\right) = \underline{\operatorname{Proj}}_X \left(\operatorname{Sym}\left(\mathcal{O}_X^{\otimes n+1}\right)\right).$$

Insbesondere lässt sich mit der Notation aus vorherigem Beispiel (sowie mit der angegebenen Surjektion) für passendes n das Schema $\underline{\operatorname{Proj}}_X \left(\bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{I}^d\right)$ als abgeschlossenen Unterschema von $\mathbb{P}_X^n$ auffassen.

Definition A.4.13 (Aufblasung)**.** Sei X ein lokal noethersches Schema und $\mathcal{I}$ eine quasi-kohärente Idealgarbe auf X. Dann bezeichnen wir $\widetilde{X} = \underline{\operatorname{Proj}}_X \left(\bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{I}^d\right)$ mit dem Morphismus $\pi : \widetilde{X} \to X$ als die *Aufblasung von X mit Zentrum $V(\mathcal{I})$ bzw. $\mathcal{I}$*. Ist X affin, so stimmt dies mit der ersten Definition überein.

Sei $Y = V(\mathcal{I})$ das abgeschlossene Unterschema von X, das sich nach Proposition A.4.4 eindeutig der Idealgarbe $\mathcal{I}$ zuordnen lässt. Wir nennen $\pi^{-1}(Y)$ auch den *exzeptionellen Divisor* des Blow-Ups von X entlang Y.

Bemerkung A.4.14 (Eigenschaften der Aufblasung)**.** In Analogie zum affinen Fall lässt sich feststellen, dass der Aufblasungsmorphismus π genau dann ein Isomorphismus ist, wenn $\mathcal{I}$ eine invertierbare Garbe ist. Da der Aufblasungsmorphismus im affinen Fall projektiv ist, ist er insbesondere eigentlich (siehe Proposition A.2.13). Da dies eine lokale Eigenschaft ist, folgt allgemein, dass der Aufblasungsmorphismus eigentlich ist. Wir können auch eine Beobachtung aus Beispiel A.4.8 verallgemeinern: Ist $U = X \setminus V(\mathcal{I})$, dann ist $\mathcal{I}|_U = \mathcal{O}_U$, also invertierbar, und damit $\pi^{-1}(U) \to U$ ein Isomorphismus. Ist X ferner integer und $\mathcal{I} \neq 0$, so ist auch $\widetilde{X}$ integer und π birational. Für Details, siehe [Liu02, Prop. 8.1.12].

Sei $\pi : Y \to X$ ein Morphismus von Schemata und $\mathcal{I}$ eine quasi-kohärente Idealgarbe auf X. Wir haben einen kanonischen Homomorphismus $\pi^*\mathcal{I} \to \pi^*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$. Das Bild von $\pi^*\mathcal{I}$ in $\mathcal{O}_Y$ ist eine quasi-kohärente Idealgarbe auf Y, die wir mit $\left(\pi^{-1}\mathcal{I}\right)\mathcal{O}_Y$ bezeichnen. Damit lässt sich eine weitere Beobachtung formulieren: Nämlich ist (mit vorheriger Notation) $\left(\pi^{-1}\mathcal{I}\right)\mathcal{O}_{\widetilde{X}} = \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(1)$ und damit invertierbar. Das ist äquivalent dazu zu sagen, dass sich der exzeptionelle Divisor $E = \pi^{-1}(Y)$, welcher ein abgeschlossenes Unterschema von $\widetilde{X}$ ist, lokal als Verschwindungsort einer einzigen regulären Funktion schreiben lässt. D.h. für alle $p \in E$ gibt es eine offene Umgebung $U = \operatorname{Spec} A \subseteq \widetilde{X}$, sodass $E \cap U = \operatorname{Spec} A/(f) = V(f)$ für ein $0 \neq f \in A$. Wir nennen ein abgeschlossenes Unterschema mit dieser Eigenschaft auch *effektiver Cartier-Divisor*.

Proposition A.4.15 (Morphismen zwischen Aufblasungen)**.** *Sei $f : W \to X$ ein Morphismus lokal noetherscher Schemata und $\mathcal{I}$ eine quasi-kohärente Garbe von Idealen auf X. Seien $\pi : \widetilde{X} \to X$ und $\rho : \widetilde{W} \to W$ die Aufblasungen von X und W mit den Zentren $\mathcal{I}$ und $\left(f^{-1}\mathcal{I}\right)\mathcal{O}_W$ (bzw. $V(\mathcal{I})$ und $f^{-1}(V(\mathcal{I}))$). Dann existiert ein eindeutiger Morphismus $\widetilde{f} : \widetilde{W} \to \widetilde{X}$, sodass das folgende Diagramm kommutiert*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{W} \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "\rho"'] & \widetilde{X} \arrow[d, "\pi"] \\ W \arrow[r, "f"'] & X. \end{tikzcd}$$

Beweis. Siehe [Liu02, Prop. 8.1.15]. □

Ist $f : W \to X$ eine abgeschlossene Immersion und das Bild von W nicht in $V(\mathcal{I})$ enthalten, so ist $\widetilde{W} \to \widetilde{X}$ ebenfalls eine abgeschlossene Immersion.

Definition A.4.16 (strikte Transformierte)**.** Sei X ein lokal noethersches Schema und $\pi : \widetilde{X} \to X$ die Aufblasung von X entlang eines abgeschlossenen Unterschemas $V(\mathcal{I})$. Für ein abgeschlossenen Unterschema W von X, das nicht in $V(\mathcal{I})$ enthalten ist, nennen wir das abgeschlossenes Unterschema $\widetilde{W} \subseteq \widetilde{X}$ die *strikte Transformierte* von W. Mengentheoretisch ist dies der Abschluss von $\pi^{-1}\left(W \setminus V(\mathcal{I})\right)$ in $\widetilde{X}$.

Beispiel A.4.17 (strikte Transformierte einer Kurve)**.** Sei $\pi : \widetilde{\mathbb{A}_k^2} \to \mathbb{A}_k^2$ die Aufblasung von $\mathbb{A}_k^2$ in einem Punkt p. Dann wird $\widetilde{\mathbb{A}_k^2}$ überdeckt von zwei Karten U_1 und U_2, die beide isomorph zu $\mathbb{A}_k^2$ sind. Wählt man die Koordinaten x, y für $\mathbb{A}_k^2$ sodass $p = (0, 0)$, dann hat U_1 die Koordinaten $x, y/x$ und U_2 die Koordinaten $y, x/y$. Der exzeptionelle Divisor E ist definiert durch x in U_1 und durch y in U_2. Wir betrachten nun eine Kurve $C = V(f)$ in $\mathbb{A}_k^2$. Dann ist das Urbild von C unter der Aufblasung π definiert durch $f \circ \pi$. Ferner zerfällt $\pi^{-1}(C)$ in die Vereinigung zweier Kurven

$$\pi^{-1}(C) = \widetilde{C} \cup E,$$

wobei $E = \pi^{-1}(\{p\})$ den exzeptionellen Divisor und $\widetilde{C}$ die strikte Transformierte von C, d.h. den Abschluss von $\pi^{-1}(C \setminus \{p\})$ in $\widetilde{\mathbb{A}_k^2}$, darstellt. In der Karte U_1 ist das Urbild von C definiert durch

$$f\left(x, x\left(\frac{y}{x}\right)\right) = x^d \widetilde{f}\left(x, \frac{y}{x}\right),$$

wobei d den kleinsten Monomgrad in f bezeichne. Man bemerke, dass x^d den exzeptionellen Divisor E („d- mal gezählt “) und $\widetilde{f} = 0$ die strikte Transformierte $\widetilde{C}$ definiert. Das Urbild von C in U_2 ist entsprechend

$$f\left(y\left(\frac{x}{y}\right), y\right) = y^d \widetilde{f}\left(\frac{x}{y}, y\right).$$

Wir betrachten nun als konkretes Beispiel die strikte Transformierte des Koordinatenkreuzes $Y = V(xy)$. Dann ist

$$\pi^{-1}(Y) \cap U_1 = V(x^2) \cup V(y/x)$$

und
$$\pi^{-1}(Y) \cap U_2 = V(y^2) \cup V(x/y).$$

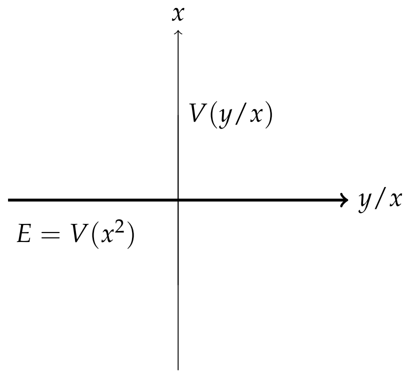


Abbildung A.1: $\pi^{-1}(Y)$ in der Karte U_1 in den Koordinaten $x, y/x$

Korollar A.4.18 (Universelle Eigenschaft der Aufblasung)**.** *Sei X ein lokal noethersches Schema und $\pi : \widetilde{X} \to X$ die Aufblasung von X entlang eines abgeschlossenen Unterschemas Y. Für jeden Morphismus $f : W \to X$, sodass $f^{-1}(Y)$ ein effektiver Cartier-Divisor ist, existiert ein eindeutiger Morphismus $g : W \to \widetilde{X}$, sodass das folgende Diagramm kommutiert*

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & \widetilde{X} \arrow[d, "\pi"] \\ & X. \end{tikzcd}$$

Wir wollen nun Aufblasungen von regulären lokal noetherschen Schemata in regulären abgeschlossenen Unterschemata studieren.

Definition A.4.19 (reguläre Immersion)**.** Sei A ein Ring. Wir nennen eine Folge von $a_1, \dots, a_n \in A$ eine *reguläre Folge*, wenn a_1 kein Nullteiler ist und a_i für alle $i \geq 2$ kein Nullteiler in $A/(a_1, \dots, a_{i-1})$ ist. Sei Y ein lokal noethersches Schema und $f : X \to Y$ eine abgeschlossene Immersion. Wir sagen, f ist eine *reguläre Immersion in* $x \in X$, wenn das Ideal $\ker(\mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x})$ durch eine reguläre Folge in $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$ erzeugt wird. Wir sagen f ist eine reguläre Immersion, wenn dies für alle Punkte gilt.

Satz A.4.20. *Sei X ein reguläres lokal noethersches Schema und $\pi : \widetilde{X} \to X$ die Aufblasung von X entlang eines regulären abgeschlossenen Unterschemas $Y = V(\mathcal{I})$. Dann gilt:*

(i) Das Schema $\widetilde{X}$ ist regulär.

(ii) Für jedes $x \in Y$ ist die Faser $\widetilde{X}_x$ isomorph zu $\mathbb{P}^{r-1}_{\kappa(x)}$, wobei $r = \dim_x X - \dim_x Y$.

(iii) Sei $E = \pi^{-1}(Y) = V\left(\left(\pi^{-1}\mathcal{I}\right)\mathcal{O}_{\widetilde{X}}\right)$ der exzeptionelle Divisor. Dann ist $E \to \widetilde{X}$ eine reguläre Immersion (d.h. E lässt sich lokal als Verschwindungsort einer regulären Folge darstellen). Ist X affin und ist $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ frei von Rang r in Y, so gilt $E \simeq \mathbb{P}^{r-1}_Y$.

Beweis. Siehe [Liu02, Prop. 8.1.19] □

Aufblasungen sind eine fundamentale Konstruktion der birationalen Geometrie. Der folgende Satz zeigt, dass projektive birationale Morphismen vorwiegend Aufblasungen sind:

Satz A.4.21. *Sei X ein quasi-projektives Schema über einem affinen noetherschen Schema.*

(i) Die Aufblasung $\pi : \widetilde{X} \to X$ von X entlang eines abgeschlossenen Unterschemas ist ein projektives Morphismus.

(ii) Sei $f : Z \to X$ ein projektiver birationaler Morphismus. Dann ist f die Aufblasung von X entlang eines abgeschlossenen Unterschemas.

Beweis. Siehe [Liu02, Prop. 8.1.22 und Thm. 8.1.24] □

Auflösung von Singularitäten

Da reguläre noethersche Schemata viele gute Eigenschaften haben, ist es wünschenswert, viele Probleme auf den Fall von regulären Schemata reduzieren zu können. Ein Weg, dies zu tun, ist es, Singularitäten aufzulösen. Dies kann man mit Hilfe von Aufblasungen erreichen. Wir wollen dies zunächst anhand eines Spezialfalls illustrieren.

Definition A.4.22. Eine Kurve C mit den irreduziblen Komponenten $C_1, \dots, C_n$ auf einer Fläche ist *aufgelöst*, wenn C strikte normale Überkreuzungen hat, d.h.

(i) Jedes C_i ist glatt;

(ii) Keine drei Komponenten schneiden sich;

(iii) Die Komponenten schneiden sich höchstens transversal.

Eine *(eingebettete) Auflösung von Singularitäten* einer Kurve C ist eine Folge von Aufblasungen sodass das Urbild von C unter diesen Aufblasungen aufgelöst ist.

Beispiel A.4.23 (Fortsetzung von Beispiel A.4.17)**.** Sei wieder $\pi : \widetilde{\mathbb{A}_k^2} \to \mathbb{A}_k^2$ die Aufblasung von $\mathbb{A}_k^2 = \operatorname{Spec} k[x,y]$ im Ursprung $p = (0,0)$. Wir betrachten nun die Neilsche Parabel $V = V(x^2 - y^3)$. Dann ist die assoziierte Jacobi-Matrix $J = (2x, -3y)$ und J_p hat genau dann Rang 0, wenn $p = (0,0)$. Wir betrachten wieder das Urbild von V in diesen beiden Karten. Es gilt

$$\pi^{-1}(V) \cap U_1 = V(x^2) \cup V\left(1 - \left(\frac{y}{x}\right)^3 x\right)$$

und damit besitzt das Urbild von V in U_1 ausschließlich strikte normale Überkreuzungen. Hingegen gilt in U_2

$$\pi^{-1}(V) \cap U_2 = V(y^2) \cup V\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2 - y\right)$$

und damit schneiden sich die beiden Komponenten tangential im Ursprung und $\pi^{-1}(V)$ ist also nicht aufgelöst. Wir blasen also U_2 im Ursprung auf, um diese tangentiale Überkreuzung loszuwerden. Diese Aufblasung besitzt zwei Karten U_3 und U_4, die beide isomorph zu $\mathbb{A}_k^2$ sind, mit den Koordinaten $x/y, y^2/x$ bzw. $y, x/y^2$. In U_4 ist das Urbild von $\pi^{-1}(V) \cap U_2$ gegeben als

$$V(y^3) \cup V\left(1 - \left(\frac{x}{y^2}\right)^2 y\right)$$

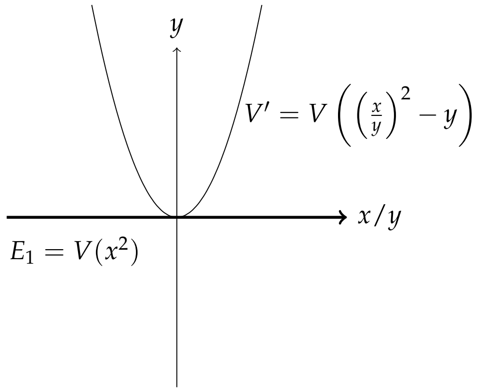


ABBILDUNG A.2: $\pi^{-1}(V)$ in der Karte U_2 in den Koordinaten $x/y, y$

und besitzt damit strikte normale Überkreuzungen. In der Karte U_3 ist das Urbild von $\pi^{-1}(V) \cap U_2$ gegeben durch

$$V\left(\left(\frac{x}{y}\right)^3 \left(\frac{y^2}{x}\right)^2\right) \cup V\left(\frac{x}{y} - \frac{y^2}{x}\right)$$

und besitzt damit im Ursprung eine nicht-normale Überkreuzung. Wir blasen also

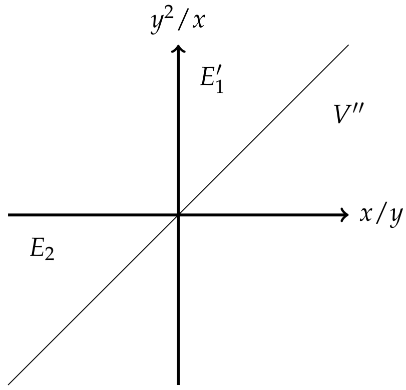


ABBILDUNG A.3: $\pi^{-1}(V) \cap U_2$ in der Karte U_3 in den Koordinaten $x/y, y^2/x$

als nächstes U_3 im Ursprung auf. Wieder besitzt die Aufblasung zwei Karten U_5 und U_6 mit jeweils den Koordinaten $x/y, y^3/x^2$ und $y^2/x, x^2/y^3$. Dann ist entsprechende Kurve gegeben durch

$$V\left(\left(\frac{x}{y}\right)^6 \left(\frac{y^3}{x^2}\right)^2\right) \cup V\left(1 - \frac{y^3}{x^2}\right)$$

bzw.

$$V\left(\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^3 \left(\frac{y^3}{x}\right)^6\right) \cup V\left(\frac{x^2}{y^3} - 1\right)$$

und besitzt damit jeweils strikte normale Überkreuzungen. Die durchgeführte Folge von Aufblasungen ist also eine Auflösung von Singularitäten von V.

Nun möchten wir den Begriff verallgemeinern.

Definition A.4.24 (Auflösung von Singularitäten)**.** Für ein reduziertes lokal noethersches Schema Y nennt man einen eigentlichen birationalen Morphismus $\pi : X \to Y$ mit X regulär eine *Auflösungen von Singularitäten*. Ist π Isomorphismus über jedem regulären Punkt von Y spricht man von strikten Auflösungen von Singularitäten.

Beliebige Schemata besitzen aber keinesfalls eine Auflösung von Singularitäten. Eine Eigenschaft von Schemata, die sich in der Frage nach Auflösungen von Singularitäten als grundlegend herausgestellt hat, nennt sich *exzellent*.

Sei A ein noetherscher Ring. Dann heißt A *katenär*, wenn für alle Primideale $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$ von A gilt $\mathrm{ht}(\mathfrak{m}/\mathfrak{q}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{m}/\mathfrak{p}) + \mathrm{ht}(\mathfrak{p}/\mathfrak{q})$. Man nennt A *universell katenär*, wenn jede endlich erzeugte A-Algebra katenär ist. Ist $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring und $\widehat{A}$ die Komplettierung von A in der $\mathfrak{m}$-adischen Topologie, so nennen wir die Fasern von $\pi : \operatorname{Spec} \widehat{A} \to \operatorname{Spec} A$ auch *formale Fasern*. Wir nennen eine formale Faser $\pi^{-1}(x) = \operatorname{Spec}(\widehat{A} \otimes_A \kappa(x))$ *geometrisch regulär*, wenn für alle endlich erzeugten Erweiterung $k'/\kappa(x)$ gilt, dass $\operatorname{Spec}(\widehat{A} \otimes_A k')$ regulär ist.

Definition A.4.25 (exzellent)**.** Sei A ein noetherscher Ring. Dann ist A *exzelllent*, wenn

(i) $\operatorname{Spec} A$ universell katenär ist,

(ii) für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ die formalen Fasern von $A_{\mathfrak{p}}$ geometrisch regulär sind und

(iii) für jede endlich erzeugte A-Algebra B die Menge der regulären Punkte von $\operatorname{Spec} B$ offen in $\operatorname{Spec} B$ sind.

Ein lokal noethersches Schema X ist *exzellent*, wenn eine affine offene Überdeckung $\{U_i\}_i$ von X existiert, sodass $\mathcal{O}_X(U_i)$ für alle i exzellent ist.

Damit ist jeder vollständige lokale noethersche Ring (insbesondere Körper) und folglich jede algebraische Varietät über einem Körper exzellent.

Grothendieck hat in [EGA, S. IV, 7.9] gezeigt, dass wenn ein lokal noethersches Schema X die Eigenschaft besitzt, eine Auflösung von Singularitäten zuzulasssen, exzellent ist. Er hat ferner die Vermutung aufgestellt, dass auch die Umkehrung gilt. Hironaka hat in [Hir65] diese Aussage für reduzierte Varietäten X über Körpern der Charakteristik 0 gezeigt, in beliebiger Charakteristik ist dies jedoch ein offenes Problem (siehe bspw. [Hau10]). Lipman hat in [Lip78] den Fall, in dem X von Dimension 2 ist, gezeigt. Genauer beweist dieser, dass für ein zweidimensionales reduziertes noethersches Schema Y mit Normalisierung $\widetilde{Y}$ eine strikte Auflösung der Singularitäten existiert, wenn $\widetilde{Y}$ endlich über Y ist, nur endlich viele singuläre Punkte besitzt und für jedes $y \in \widetilde{Y}$ die Komplettierung des lokalen Rings $\mathcal{O}_{\widetilde{Y},y}$ normal ist. Dies ist erfüllt, wenn Y exzellent ist.

Literatur

[CA00] Eduardo Casas-Alvero. *Singularities of Plane Curves*. Bd. 276. Cambridge University Press, 2000.

[Con14] Brian Conrad. *Lecture Notes: Perfectoid Spaces*. `http://math.stanford.edu/~conrad/Perfseminar/`. Okt. 2014.

[DFF87] David E Dobbs, Richard Fedder und Marco Fontana. „Abstract Riemann Surfaces of Integral Domains and Spectral Spaces“. In: *Annali di Matematica Pura ed Applicata* 148.1 (1987), S. 101–115.

[EGA] Alexander Grothendieck und J Dieudonné. „Éléments de géométrie algébrique: IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Seconde partie“. In: *Publ. math. IHES* 24 (1965), S. 5–231.

[EH06] David Eisenbud und Joe Harris. *The Geometry of Schemes*. Bd. 197. Springer Science & Business Media, 2006.

[EP05] Antonio J Engler und Alexander Prestel. *Valued Fields*. Springer Science & Business Media, 2005.

[Har13] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Bd. 52. Springer Science & Business Media, 2013.

[Hau10] Herwig Hauser. „On the problem of resolution of singularities in positive characteristic (Or: A proof we are still waiting for)“. In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 47.1 (2010), S. 1–30.

[Hir65] Heisuke Hironaka. „Resolution of Singularities of an Algebraic Variety over a Field of Characteristic zero. I“. In: *Matematika* 9.6 (1965), S. 2–70.

[Lic68] Stephen Lichtenbaum. „Curves Over Discrete Valuation Rings“. In: *American Journal of Mathematics* 90.2 (1968), S. 380–405.

[Lip78] Joseph Lipman. „Desingularization of two-dimensional Schemes“. In: *Annals of Mathematics* 107.2 (1978), S. 151–207.

[Liu02] Qing Liu. *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*. Bd. 6. Oxford University Press on Demand, 2002.

[Mat89] Hideyuki Matsumura. *Commutative Ring Theory*. Bd. 8. Cambridge university press, 1989.

[Mum99] David Mumford. *The Red Book of Varieties and Schemes, volume 1358 of Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, expanded edition, 1999.

[Neu06] Jürgen Neukirch. *Algebraische Zahlentheorie*. Springer-verlag, 2006.

[Olb15] Bruce Olberding. „Affine schemes and topological closures in the Zariski–Riemann space of valuation rings“. In: *Journal of Pure and Applied Algebra* 219.5 (2015), S. 1720–1741.

[PS11] Florian Pop und Jakob Stix. „Arithmetic in the fundamental group of a p-adic curve: on the p-adic section conjecture for curves“. In: *arXiv preprint arXiv:1111.1354* (2011).

[Stacks] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. http://stacks.math.columbia.edu. 2018.

[Vaq08] Michel Vaquié. „Valuations and local uniformization“. In: *Advanced Studies in Pure Mathematics* 4 (2008), S. 200.

[Zar39] Oscar Zariski. „The Reduction of the Singularities of an Algebraic Surface“. In: *Annals of Mathematics* (1939), S. 639–689.

[ZS13] Oscar Zariski und Pierre Samuel. *Commutative Algebra*. Bd. 2. Springer Science & Business Media, 2013.