GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

3. Übungsblatt (erschienen am 10.05.2017)

Aufgabe 1 (Rechenregeln für unbeschränkte Operatoren)

Seien A, B und C (möglicherweise unbeschränkte) Operatoren. Zeigen Sie die Rechenregeln:

$$\begin{aligned}(A+B)+C &= A+(B+C),\\ (AB)C &= A(BC),\\ (A+B)C &= AC+BC,\\ A(B+C) &\supseteq AB+AC.\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Moore-Penrose-Inverse der Abbildung

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n.$$

Aufgabe 3

Betrachten Sie die *Shiftoperatoren* $W, S : \ l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$,

$$W : \ (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (x_2, x_3, x_4, \ldots), \qquad S : \ (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, \ldots)$$

Zeigen Sie, dass $W, S \in \mathcal{L}(l^2(\mathbb{N}))$ und berechnen Sie $\|W\|_{l^2(\mathbb{N})}$, $\|S\|_{l^2(\mathbb{N})}$ sowie die Moore-Penrose-Inversen W^+ und S^+.

Aufgabe 4 (schriftlich)

Betrachten Sie die Abbildung $A : l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N}), Ax := y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n = \frac{1}{n} x_n$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $A \in \mathcal{L}(l^2(\mathbb{N})), \|A\|_{\mathcal{L}(l^2(\mathbb{N}))} = 1$

(b) $l^2(\mathbb{N}) = \overline{\mathcal{R}(A)} \supsetneq \mathcal{R}(A)$

(c) $\mathcal{D}(A^+) = \mathcal{R}(A)$ und $A^+ y = x$, wobei $x_n = n y_n$.

Abgabe: 23.05.17, bis 12:00 Uhr. Zu schriftlichen Aufgaben soll eine Lösung in Kasten 42, Robert-Mayer-Str. 6-8 dritter Stock eingeworfen werden. Zu Programmieraufgaben soll eine kommentierte Ausarbeitung in MATLAB-Code an **jahn@math.uni-frankfurt.de** geschickt werden.