

2. Übungsblatt (erschienen am 26.04.2017)

Aufgabe 1 (Satz von Lax-Milgram)

Es sei X ein Hilbertraum und

$$b : X \times X \rightarrow \mathbb{R},$$

eine stetige, symmetrische, koerzive Bilinearform, d.h.

$$\begin{aligned} b(u, v) &= b(v, u) & \forall u, v \in X & \quad (\text{Symmetrie}) \\ \exists C > 0 : |b(u, v)| &\leq C \|u\| \|v\| & \forall u, v \in X & \quad (\text{Stetigkeit}) \\ \exists \beta > 0 : b(u, u) &\geq \beta \|u\|^2 & \forall u \in X & \quad (\text{Koerzivität}) \end{aligned}$$

und b ist in beiden Komponenten linear. Weiterhin sei $l \in X'$.

Zeigen Sie, dass dann genau ein $u \in X$ existiert mit

$$b(u, v) = l(v) \quad \text{für alle } v \in X, \tag{1}$$

dass u stetig und linear von l abhängt,

$$\|u\|_X \leq \frac{1}{\beta} \|l\|_{X'},$$

und dass u das eindeutige Minimum ist von

$$J : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad J(v) := \frac{1}{2} b(v, v) - l(v).$$

Gehen Sie zum Beweis der Existenz wie folgt vor:

- Zeigen Sie zunächst, dass J nach unten beschränkt ist.
- Zeigen Sie, dass ein Minimum $u \in H$ dieses Funktionals existiert, indem Sie beweisen, dass jede J minimierende Folge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset H$ eine Cauchyfolge ist. Verwenden Sie dazu

$$b(u_k - u_l, u_k - u_l) = 4J(u_k) + 4J(u_l) - 8J\left(\frac{u_k + u_l}{2}\right).$$

- Zeigen Sie, dass das Minimum von J die Gleichung (1) löst, indem Sie neben dem Minimum u auch Elemente $u + cv$ mit $c \in \mathbb{R}$, $v \in H$ betrachten.

Aufgabe 2 (Der Hilbertraum l^2)

Betrachten Sie den Raum aller quadratisch summierbaren Folgen

$$l^2(\mathbb{N}) := \{x := (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^2 < \infty\}$$

Zeigen Sie, dass $l^2(\mathbb{N})$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle := \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n y_n \quad x, y \in l^2(\mathbb{N})$$

ein unendlich-dimensionaler (reeller) Hilbertraum ist.

Abgabe: 09.05.17, bis 12:00 Uhr. Zu schriftlichen Aufgaben soll eine Lösung in Kasten 42, Robert-Mayer-Str. 6-8 dritter Stock eingeworfen werden. Zu Programmieraufgaben soll eine kommentierte Ausarbeitung in MATLAB-Code an jahn@math.uni-frankfurt.de geschickt werden.