GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

3. Übungsblatt (erschienen am 29.4.2024)

Aufgabe 3.1 (Votieraufgabe)
Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 - 5xy^2 + 5y^4$.

(a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f.

(b) Zeigen Sie, dass $\bar{x} = 0$ bzw. $\bar{y} = 0$ striktes globales Minimum von $x \mapsto f(x, 0)$ bzw. $y \mapsto f(0, y)$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ kein lokales Minimum von f ist.

Aufgabe 3.2 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]
Gegeben seien eine konvexe (aber nicht notwendigerweise differenzierbare) Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und zwei Punkte x^*, $z \in \mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $\psi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\psi(t) = \frac{1}{t} \left(f(x^* + tz) - f(x^*) \right)$ monoton wachsend ist.

(b) Beweisen Sie die Existenz der einseitigen Richtungsableitung

$$\partial f(x^*)z := \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \psi(t) = \inf_{t>0} \psi(t).$$

(c) Zeigen Sie: f besitzt ein globales Minimum im Punkt $x^* \iff \partial f(x^*)(x - x^*) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 3.3 (Votieraufgabe)
Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $f : X \to \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

(a) f ist konvex (auf X).

(b) Der Epigraph

$$\mathrm{Epi}(f) := \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq r\}$$

ist eine konvexe Teilmenge von $X \times \mathbb{R}$.

Aufgabe 3.5 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]
Gesucht ist das globale Minimum der Rosenbrock Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \qquad (x, y) \mapsto (1 - x)^2 + 100(y - x^2)^2.$$

Implementieren Sie hierfür in `MATLAB` das Nelder-Mead Verfahren gemäß des auf Wikipedia beschriebenen Algorithmus `https://en.wikipedia.org/wiki/Nelder-Mead_method`. Setzen Sie hierbei den Reflektionsparameter $\alpha = 1$, den Expansionsparameter $\gamma = 2$ und die Kontraktions- und Schrupfparameter jeweils auf $\rho = \sigma = 0.5$.

(a) Testen Sie Ihre Funktion, indem Sie den 30-ten Iterationsschritt berechnen. Verwenden Sie als Startwerte $S_1 = \{(0,0),\ (1,0),\ (0,1)\}$ und $S_2 = \{(0,1),\ (1,1),\ (0,2)\}$.

(b) Visualisieren Sie den 20-ten Iterationsschritt.

(c) Speichern Sie die Iterationsschritte in einem animated GIF oder einem Video (z.B. wie in `Abbildung 2: Search over the Rosenbrock banana function` auf der Wikipediaseite).
Bonus, dieser Aufgabenteil ist nicht mit abzugeben.

- Zu den **schriftlichen Aufgaben*** und **Programmieraufgaben** * soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 6.4.2024 um 14:00 Uhr in Fach 17 im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist.

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

- Zu **Multiple Choice Aufgaben** soll die Lösung auf diesem Übungsblatt angekreuzt werden. Geben Sie das Blatt versehen mit ihrem Namen zusammen mit der schriftlichen Abgabe ab. **Eine Begründung oder Ausarbeitung wird nicht verlangt**. Es gibt jeweils $+0.5$ Punkte für richtig angekreuzte Antworten und -0.5 Punkt für jedes falsch gesetzte Kreuz. Die Mindestpunktzahl von 0 Punkten kann nicht unterschritten werden.

***Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.**