

Aufgabenblatt 4

1 Abbildungen: Mehr Beispiele

Prüfen Sie, ob die folgenden Definitionen Abbildungen definieren. Wenn ja, prüfen Sie, ob die Abbildungen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind.

i) $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 3x - 6.$

ii) $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \mapsto 4x + 1.$

iii) $f_3 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad n \mapsto n^2.$

iv) $f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 + 1.$

v)* Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ eine Gerade, die nicht parallel zur x -Achse ist. Definiere

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto (x, \text{ sodass } \{(x, t)\} = G \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = t\})$$

(Hinweis: Zeichnen Sie ein Beispiel.)

2 Bild und Urbild

Sei $f : X \rightarrow X$ eine Abbildung. Sei $M \subseteq X$ eine Teilmenge der Definitions- bzw. Zielmenge. Bestimmen Sie in den folgenden Beispielen das Bild $f(M)$ von M unter f und das Urbild $f^{-1}(M)$ von M unter f .

i) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto n^2$ und $M = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ gerade}\}.$

ii) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 4x + 1$ und $M = [a, b]$ für beliebige $a, b \in \mathbb{R}.$

3 Abbildungen und Mengenoperationen

Sei $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung und $T_1, T_2 \subset M, S_1, S_2 \subset N$ Teilmengen.

i) Zeigen Sie die Gleichheit von Mengen $f^{-1}(S_1 \cap S_2) = f^{-1}(S_1) \cap f^{-1}(S_2).$

ii) Zeigen Sie die Gleichheit von Mengen $f^{-1}(S_1 \cup S_2) = f^{-1}(S_1) \cup f^{-1}(S_2).$

iii) Finden Sie eine konkrete Abbildung in Form eines Pfeildiagramms, die zeigt, dass $f(T_1) \cap f(T_2) = f(T_1 \cap T_2)$ im Allgemeinen falsch ist.
