GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Vorkurs Mathematik für Mathematikstudierende

Tag 2

Dr. Johannes Horn
horn@math.uni-frankfurt.de

08. - 12. April 2024, 10.15 - 11.45 Uhr,
Hörsaal H8

Tagesablauf Vorkurs

10:15-11:45 Uhr	Vorlesung in H8.
11:45-13:15 Uhr	Mittagessen, zum Beispiel in der Mensa nebenan.
13:15-14:15 Uhr	Übungszeit: Bearbeitung der Aufgabenblätter in Kleingruppen in H4 und H8.
14:15-14:45 Uhr	Besprechung der Übungsaufgaben

Hinweis zu Vorlesungszeiten

Oft werden an deutschen Universitäten die Vorlesungszeiten „cum tempore"(lat. mit Zeit) oder kurz **c.t.** angegeben: Unsere Vorlesungszeit ist 10-12 Uhr c.t.

Wiederholung

Aussage

Eine *Aussage* ist ein „sprachliches Gebilde“ , das entweder wahr oder falsch ist.

Verknüpfung von Aussagen

Negation	$\neg$	„nicht“	Äquivalenz	$\Leftrightarrow$	„genau dann, wenn“
Konjunktion	$\wedge$	„und“	Implikation	$\Rightarrow$	„Wenn ... dann ...“
Disjunktion	$\vee$	„oder“			

Beweis von Äquivalenzen

Um eine Äquivalenz von Aussagen $A \Leftrightarrow B$ zu zeigen, müssen wir die beiden Implikationen $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ zeigen.

Satz, Lemma, Korollar, ...

Sätze in verschiedenen Rollen und von verschiedener Wertigkeit

Hauptsatz / Fundamentalsatz	Wichtigster Satz einer Arbeit, Hauptresultat eines Textes.
Proposition	Wichtiges Resultat das für die Theorie wesentlich ist und zum Hauptsatz hinführt.
Lemma	Technischer Hilfssatz, der keine große Bedeutung außerhalb der Theorie hat.
Korollar	Direkte Folgerung aus einem Satz.
Bemerkung	Hinweis des Autors, der unwesentlich für das Verständnis des Textes ist. Dennoch oft sehr wertvoll für den Leser.

Beweisverfahren

- Kontrapositionsprinzip
- Widerspruchsbeweis
- Beweis durch vollständige Induktion

Äquivalenz

Satz 11

Sei n eine ganze Zahl. Dann ist n gerade genau dann, wenn n^2 gerade ist.

Definition 12

Eine natürliche Zahl $p > 1$ heißt Primzahl, wenn sie nur durch ± 1 und $\pm p$ teilbar ist.

Proposition 13 (Primfaktorzerlegung)

Sei n eine natürliche Zahl mit $n > 1$. Dann existieren Primzahlen $p_1, \ldots, p_k$ mit $p_1 \leq \cdots \leq p_k$, sodass

$$n = p_1 \cdots p_k.$$

Dies bestimmt $p_1, \ldots, p_k$ eindeutig.

Beweis

Direkter Beweis von Satz 11.

$\Rightarrow$: Satz 1, gestern bewiesen.

$\Leftarrow$: Wir nehmen zusätzlich an, dass $n > 1$. Der allgemeine Beweis folgt später.
Nach Proposition 13 existiert eine Primfaktorzerlegung

$$n = p_1 \cdots p_k \quad \text{mit} \quad p_1 \leq \cdots \leq p_k. \tag{1}$$

Dann ist $n^2 = p_1^2 \cdots p_k^2$ die Primfaktorzerlegung von n^2. Nach Annahme gilt $2 \mid n^2$. Auf Grund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung gilt damit $p_1 = 2$. Also ist nach Einsetzen in (1) $n = 2 \cdot p_2 \cdots p_k$ und damit $2 \mid n$.

$\square$

Das war kompliziert.

Kontraposition

Direkter Beweis

Beim direkten Beweis einer Implikation $A \Rightarrow B$ führt man einige Beweisschritte/Implikationen durch um von A nach B zu gelangen:

$$A \Rightarrow C_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow C_k \Rightarrow B.$$

Hierbei sind $C_1, \ldots, C_k$ Aussagen, die Zwischenschritte darstellen.

Lemma 14 (Kontrapositionsprinzip)

Seien A und B Aussagen. Dann gilt

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Beweis.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$A \Rightarrow B$
w	w	f	f	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w

$\square$

Beweis von Satz 11 mit Kontraposition.

$\Rightarrow$: Wie zuvor.

$\Leftarrow$: Die Kontraposition von „Wenn n^2 gerade ist, ist auch n gerade.“ lautet

„Wenn n ungerade ist, ist auch n^2 ungerade.“

Sei n ungerade, d.h. es gibt eine ganze Zahl k mit $n = 2k + 1$. Dann ist

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 2k + 1.$$

Also ist n^2 ungerade.

$\square$

Widerspruchsbeweis

Beim Widerspruchsbeweis einer Aussage A nehmen wir $\neg A$ an und versuchen einen Widerspruch herzuleiten.

Schwierigkeit: Es ist nicht klar, wozu ein Widerspruch entsteht.

Satz 15 (Euklid 300 v. Chr.)

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Widerspruchsbeweis.

Angenommen es gibt nur endlich viele Primzahlen $p_1, \dots, p_n$. Definiere die ganze Zahl

$$k = p_1 \cdots p_n + 1.$$

Nach Proposition 13 existieren Primzahlen $q_1, \dots, q_k$, sodass $k = q_1 \cdots q_l$. Sei $q_1 = p_i$ für ein $1 \leq i \leq n$. Dann gilt $p_i \mid k$ und $p_i \mid p_1 \cdots p_n$. Damit folgt aber

$$p_i \mid k - p_1 \cdots p_n = 1.$$

im Widerspruch zur Annahme, dass p_i eine Primzahl ist. □

Satz 16

Es existieren keine ganzen Zahlen $a, b \neq 0$, sodass $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

Widerspruchsbeweis.

Seien a, b ganze Zahlen, sodass $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Wir können annehmen, dass a, b keinen gemeinsamen Teiler $\neq \pm 1$ haben. Es gilt nach Quadrieren

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 2b^2 = a^2. \tag{2}$$

Also ist a^2 gerade und damit nach Satz 11 auch a. Also existiert eine ganze Zahl k, sodass $a = 2k$. Einsetzen in (2) liefert

$$2b^2 = 4k^2 \quad \overset{\text{Kuerzen}}{\Rightarrow} \quad b^2 = 2k^2 \quad \Rightarrow \quad 2 \mid b^2 \quad \overset{\text{Satz } 11}{\Rightarrow} \quad 2 \mid b.$$

Also gilt $2 \mid a$ und $2 \mid b$ im Widerspruch zur Annahme. $\square$

Definition 17

Eine Aussageform (oder auch Prädikat) $A(n)$ auf den natürlichen Zahlen ist ein sprachliches Gebilde, dass von einer Variable n abhängt und nach Einsetzen einer natürlichen Zahl für n zu einer Aussage wird.

Beispiel: $A(n)$= „n ist eine gerade Zahl."
Satz 11 $\Rightarrow$ Für alle natürlichen Zahlen n gilt, $A(n) \Leftrightarrow A(n^2)$.

Der **Induktionsbeweis** (auch **vollständige Induktion**) ist eine Methode um Aussagen der Form

„Für alle natürlichen Zahlen n gilt $A(n)$."

zu beweisen.

Satz 18 (Kleiner Satz von Gauss)

Für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Die **vollständige Induktion** beruht auf folgenden Eigenschaften von $\mathbb{N}$:

- Jede natürliche Zahl n hat einen eindeutigen Nachfolger $S(n) > 1$.
- Wenn: - eine Teilmenge der natürlichen Zahlen 1 enthält und
  - für jede natürliche Zahl n in dieser Teilmenge auch deren Nachfolger $S(n)$ enthalten ist

  Dann: Enthält die Teilmenge alle natürlichen Zahlen.

Induktionsbeweis

Induktionsprinzip

Sei $A(\cdot)$ eine Aussageform auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$.

Angenommen

i) es gilt $A(1)$ und

ii) für alle natürliche Zahlen n gilt:
Aus $A(n)$ folgt $A(n+1)$.

Dann gilt $A(n)$ für alle natürliche Zahlen n.

Aufschreiben von Induktionsbeweise:

IA: Induktionsanfang: Hier wird die Aussage $A(1)$ gezeigt.

IV: Induktionsvoraussetzung: Wir notieren uns, die Aussage $A(n)$ für eine natürliche Zahle n.

IS: Induktionsschritt: Wir folgern $A(n+1)$ aus $A(n)$.

Beweis von Satz 18.

IA: $A(1)$: $\quad 1 = \frac{n(n+1)}{2} = 1 \quad \checkmark$.

IV: Sei n eine natürliche Zahl, sodass

$$1 + 2 + \ldots n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

IS: Dann ist

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + (n+1) &= (1 + 2 + \cdots + n) + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+2)(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

D.h. $A(n+1)$ gilt.

Damit gilt die Aussage für alle natürlichen Zahlen n. $\square$

Satz 19

Für alle natürlichen Zahlen n ist $6^n + 4$ durch 5 teilbar.

Beweis.

IA: $A(1)$: $5 \mid 6 + 4 = 10 \quad \checkmark$.

IV: Sei n eine natürliche Zahl, sodass

$$5 \mid 6^n + 4.$$

IS: Dann folgt

$$6^{n+1} + 4 = 6(6^n) + 4 = (1+5)6^n + 4 = 5 \cdot 6^n + (6^n + 4).$$

Nach IV gilt $5 \mid (6^n + 4)$ und somit folgt $5 \mid 6^{n+1} + 4$.

Damit gilt die Aussage für alle natürlichen Zahlen n. $\square$